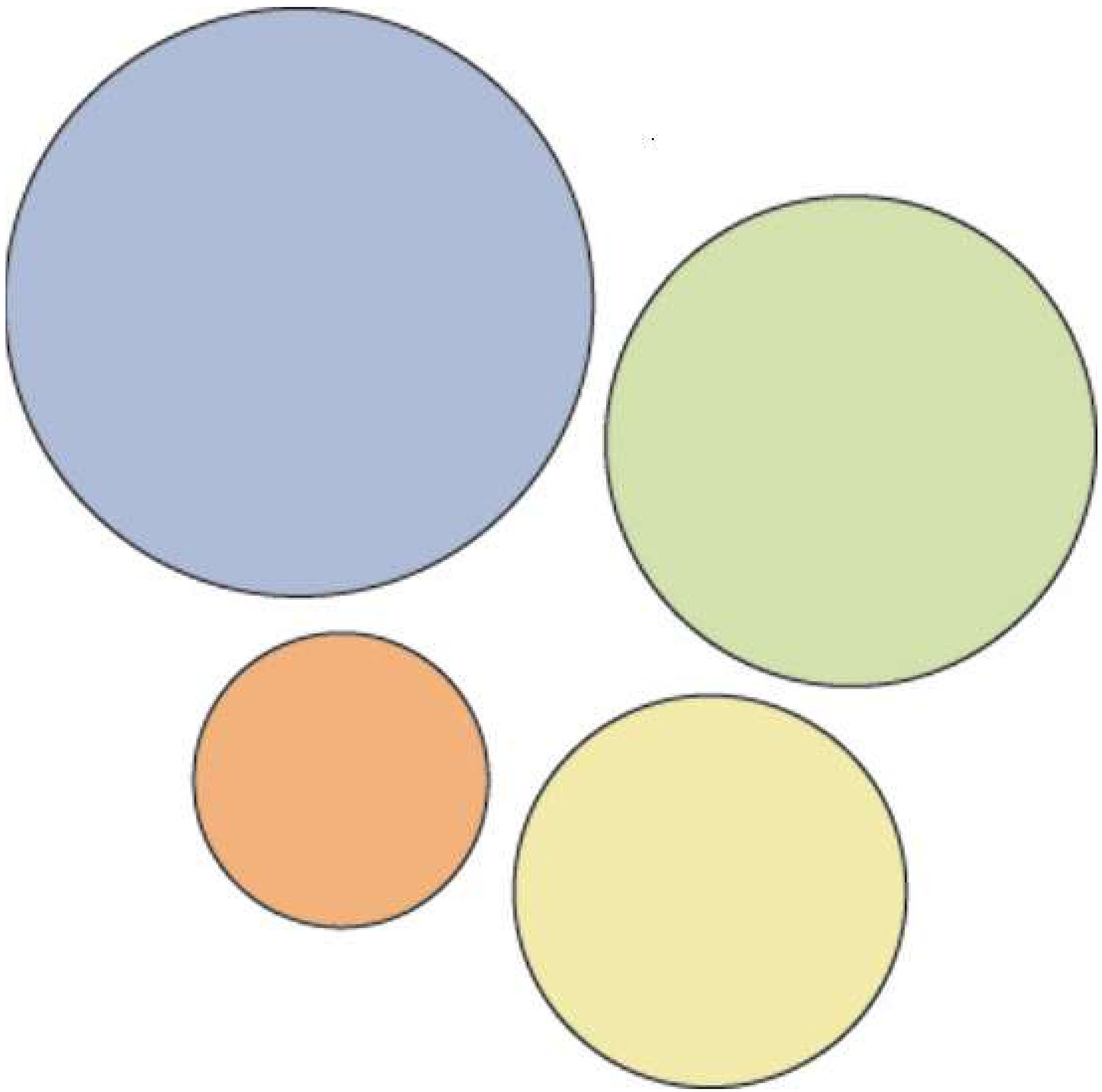
POVRŠINA KRUGA, OPSEG KRUGA I BROJ π

dr.sc. Boris Čulina

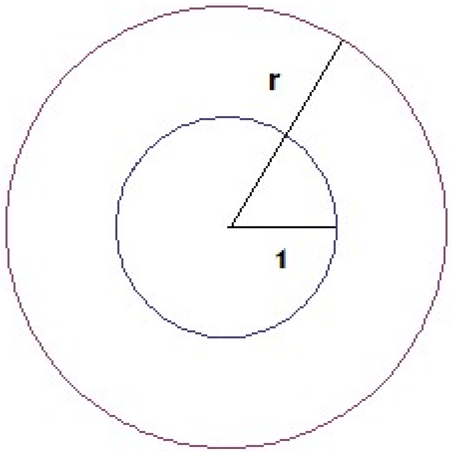
Veleučilište Velika Gorica

boris.culina@vvg.hr

Sve kružnice su međusobno slične:

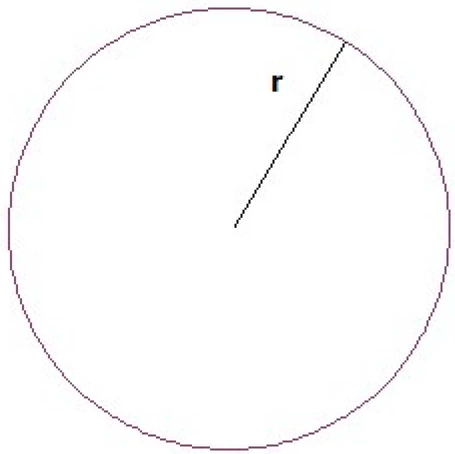


Kružnicu radijusa *r* možemo dobiti tako da svaku točku jedinične kružnice *r* puta udaljimo od ishodišta kružnice:



Tako je kružnica radijusa *r* slična jediničnoj kružnici s faktorom sličnosti *r*.

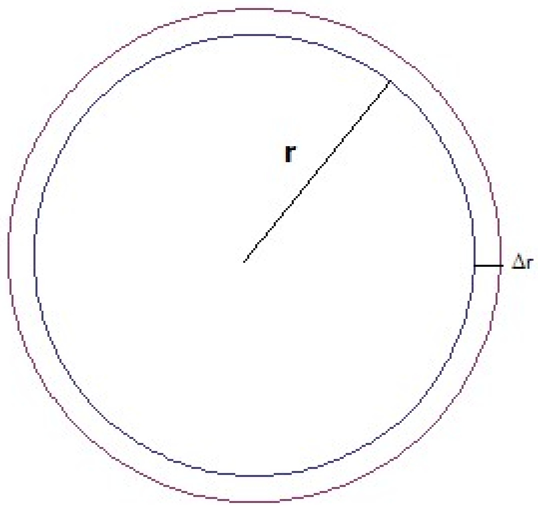
Označimo opseg i površinu jedinične kružnice O_1 i P_1. Pošto kod preslikavanja sličnosti s faktorom r opseg poraste r puta a površina r^2 puta, to su opseg O i površina P kružnice radijusa r:



$$P = r^2 P_1$$

$$O = rO_1$$

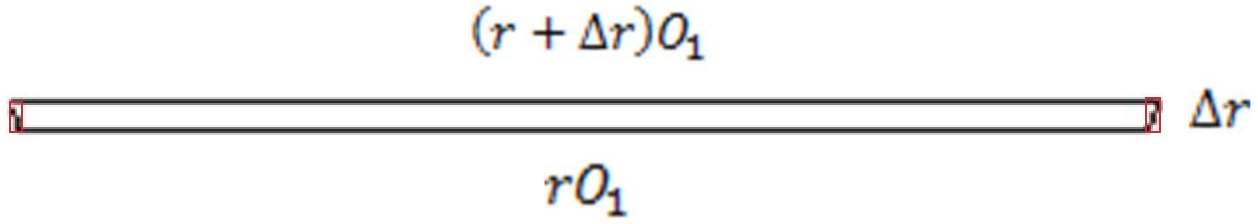
Da bismo našli vezu između opsega i površine kružnice (vezu između O_1 i P_1), povećajmo radijus za Δr:



Pri tome će se površina povećati za

$$\Delta P = (r + \Delta r)^2 P_1 - r^2 P_1 = (r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - r^2)P_1 = 2r\Delta r P_1 + \Delta r^2 P_1$$

Međutim povećanje površine je jedna uska traka koja kad je ispravimo izgleda približno kao pravokutnik (kad joj malo poravnamo rubove):



$$P = rO_1 \Delta r + \varepsilon$$

Dodaci pravokutniku su manji od crvenih kvadratića na rubu pa je

$$\varepsilon < \Delta r \cdot \Delta r O_1$$

Podijelimo li oba izraza za površinu s Δr i pogledamo li njihove vrijednosti za sve manje Δr :

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = 2rP_1 + \Delta r P_1 \qquad \frac{\Delta P}{\Delta r} = rO_1 + \frac{\varepsilon}{\Delta r}, \quad \frac{\varepsilon}{\Delta r} < \Delta r O_1$$

vidimo da mora biti: $2rP_1 = rO_1$

Odatle je lako dobiti vezu između opsega i površine jedinične kružnice:

$$O_1 = 2P_1$$

Označimo li površinu jedinične kružnice s π,

$P1 = \pi$, tad je njen opseg $O1 = 2\pi$ i formule za opseg i površinu kružnice radijusa *r* glase:

$$O = 2r\pi$$

$$P = r^2\pi$$