PARABOLA
U MATEMATICI I FIZICI
(ALI NE I KNJIŽEVNOSTI)

Boris Čulina
Veleučilište Velika Gorica

Problem astronomskog promatranja

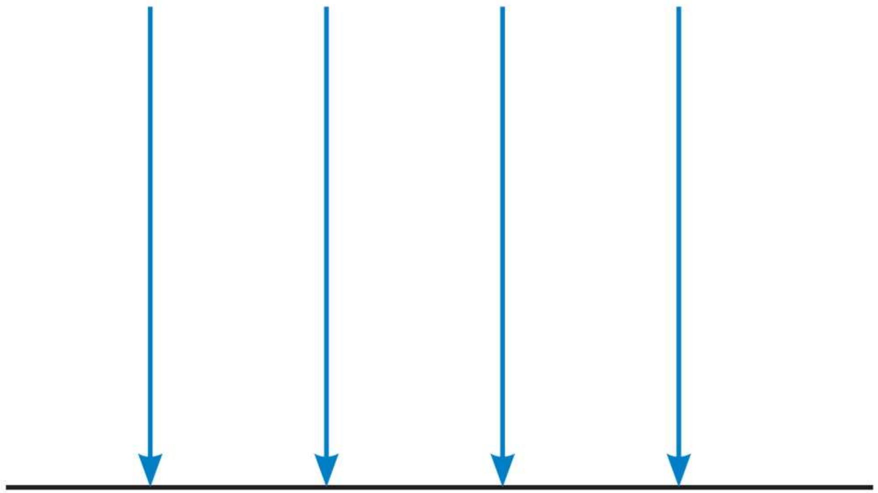
Da bismo vidjeli udaljenu zvijezdu moramo imati optički uređaj koji sve zrake svjetlosti koje dolaze od zvijezde sabire u istu točku. U rješenju će nam pomoći Fermatov princip.

Fermatov princip

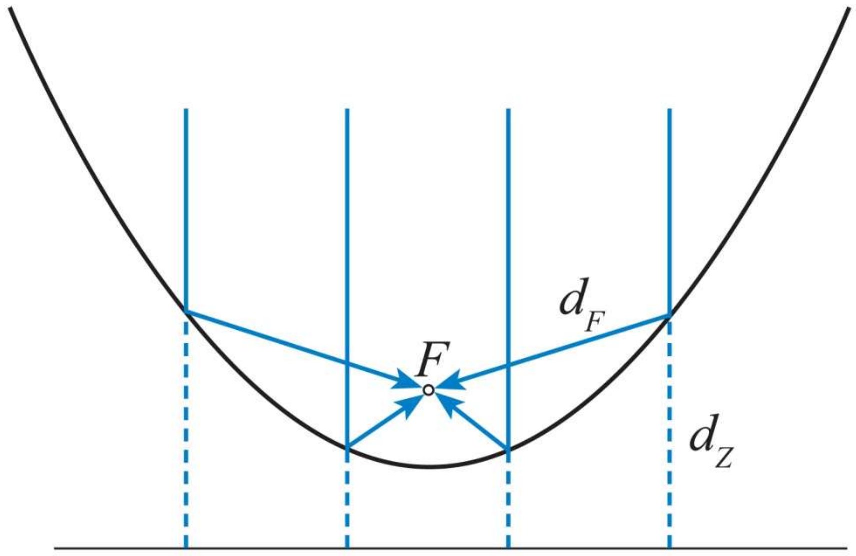
Svjetlost putuje između dvije točke onim putem za koji joj je potrebno najmanje vremena.

Dakle tražimo oblik zrcala za koji će sve zrake od zvijezde do sabirne točke biti jednako duge.

Zbog velike udaljenosti zvijezde smatramo da sve zrake od nje dolaze paralelno na Zemljinu površinu. Zato su sve one jednako udaljene od te površine.



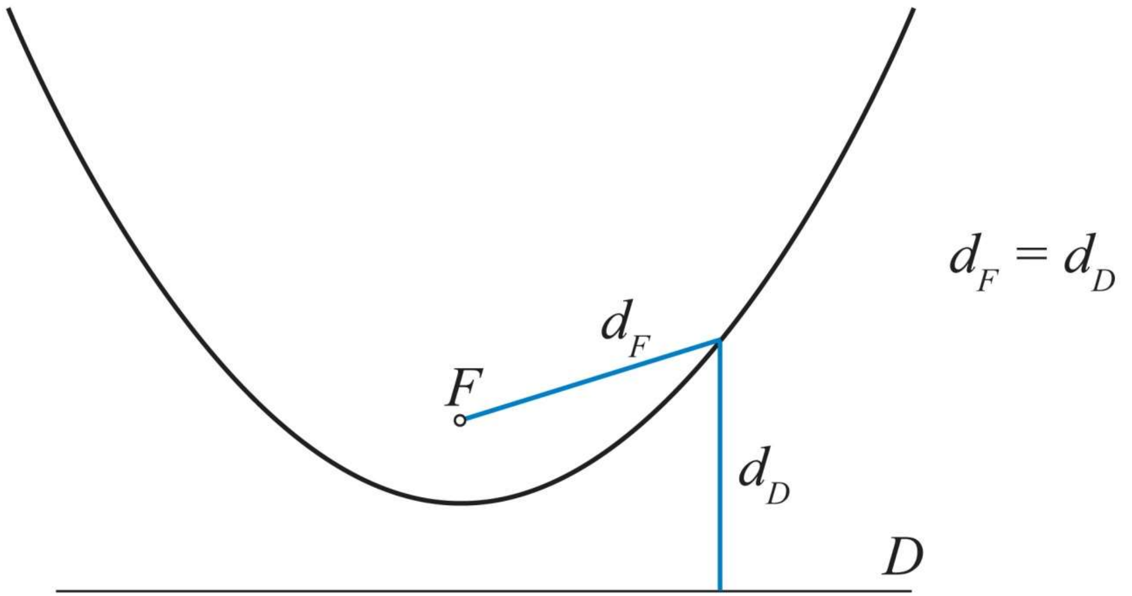
Zrcalo mora biti takvog oblika da će put zrake od zrcala do sabirne točke biti jednako dug kao put od zrcala do Zemljine površine.



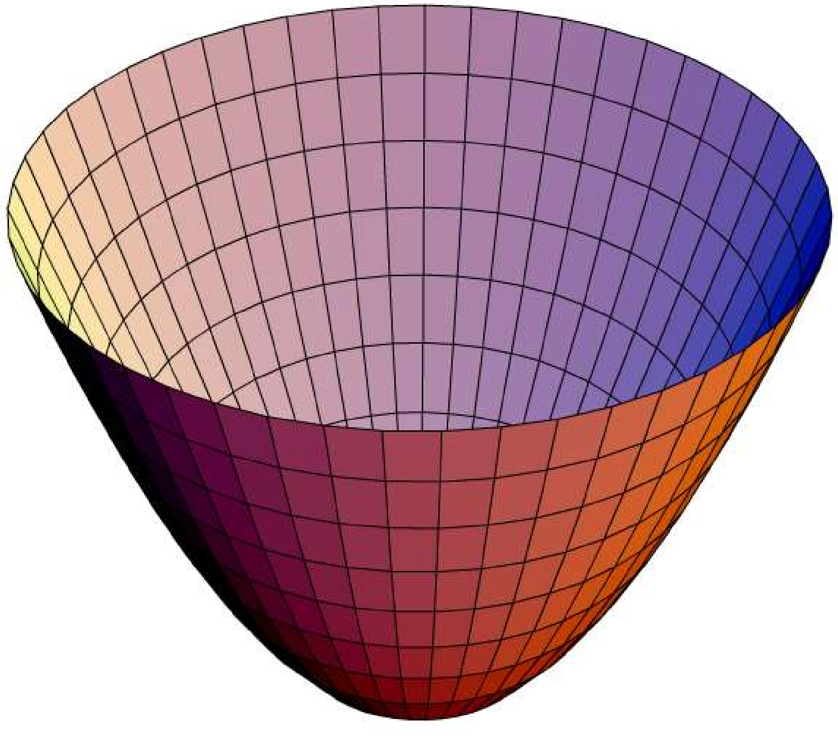
$d_F = d_Z$

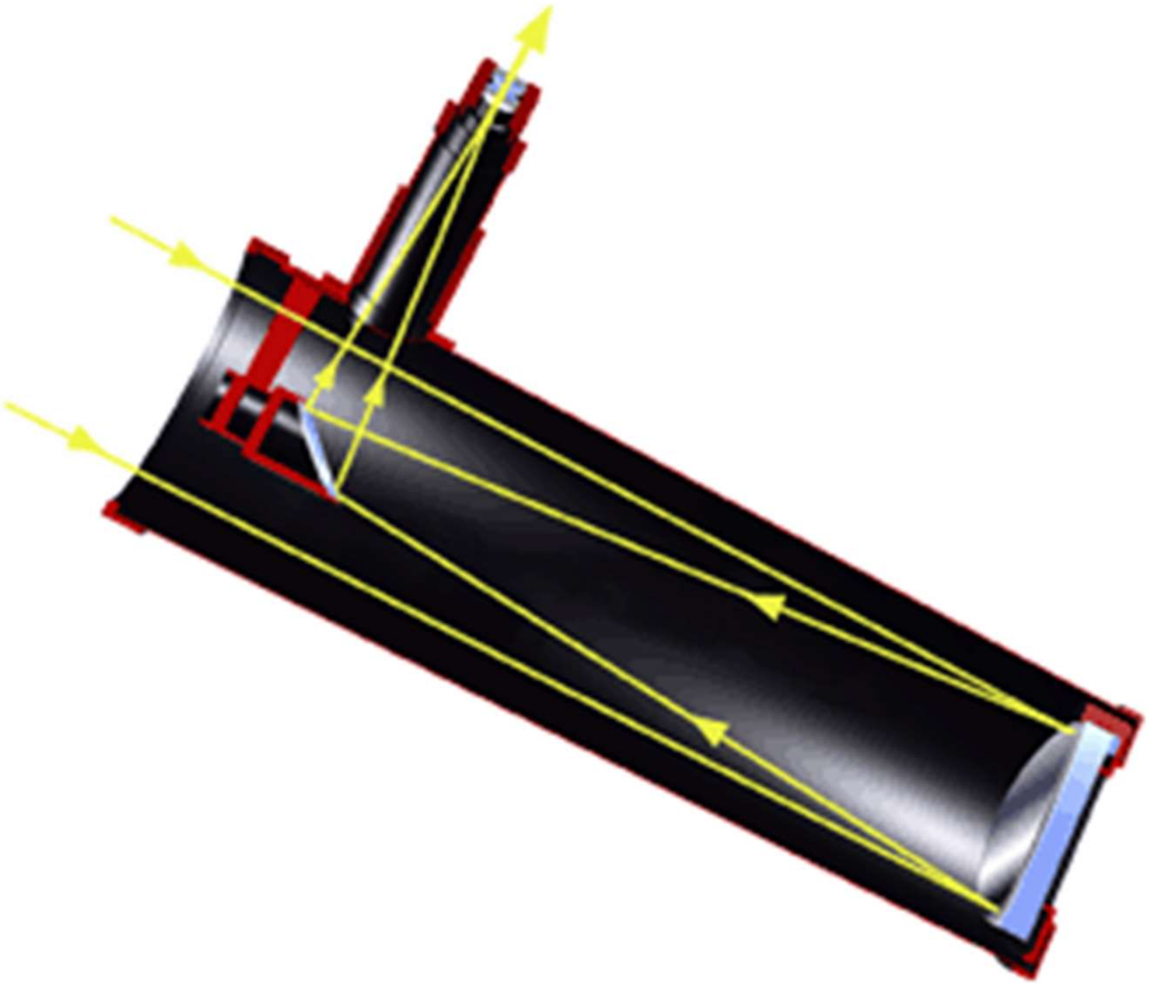
Parabola

Parabola je skup točaka jednako udaljenih od zadanog pravca (direktrisa parabole) i zadane točke (žarište parabole).

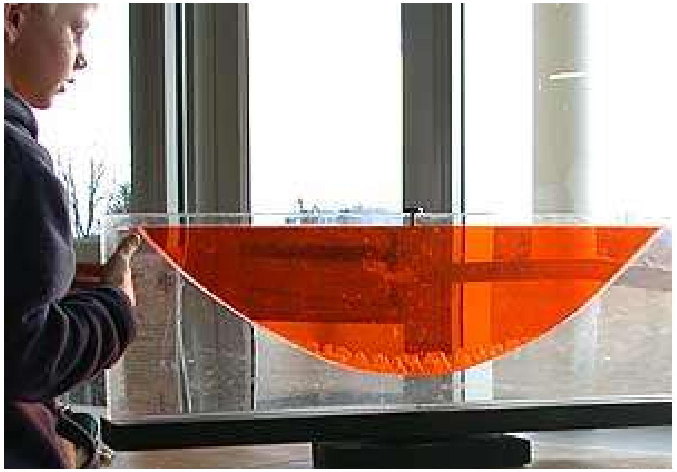


Tako je rješenje problema astronomskog promatranja **parabolično zrcalo**, zrcalo koje ima oblik paraboloida, plohe nastale rotacijom parabole oko svoje osi simetrije.





Izrada paraboličkih zrcala se zasniva na fizikalnom zakonu po kojem površina tekućine koja rotira u posudi poprima parabolički oblik.



Radi jednostavnije izrade za manje teleskope se rade **sferna zrcala** jer ona dobro aproksimiraju parabolička zrcala u blizini osi simetrije.

Osim za sakupljanje svjetlosti parabolička zrcala mogu poslužiti i za sakupljanje radio valova iz svemira

ALMA at Chajnantor
(Courtesy NAOJ)

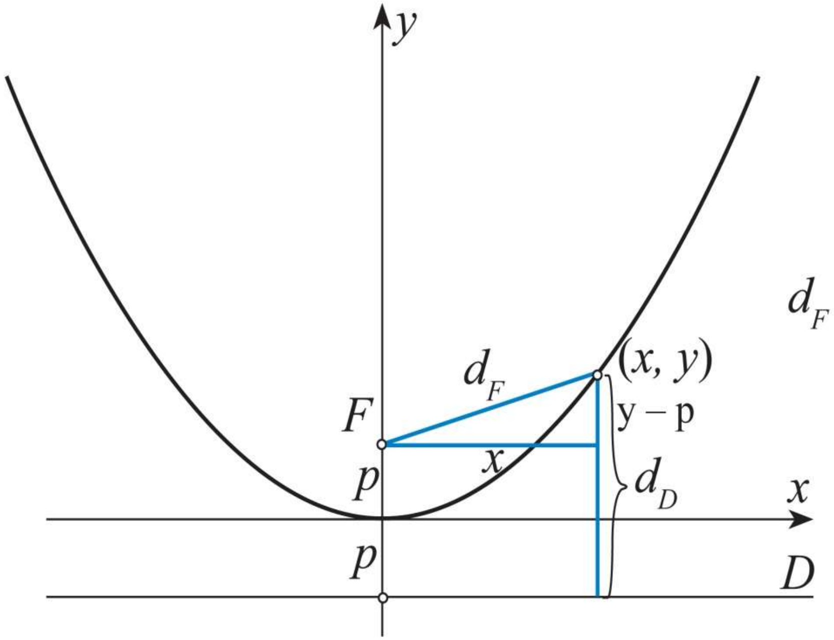
ESO PR Photo 14/01 (6 April 2001)

ili od
telekomunikacijskih
satelita

ili za sakupljanje sunčeve energije

Ako upotrijebimo parabolično zrcalo u suprotnom smjeru, tako da u žarište stavimo izvor svjetla dobit ćemo reflektor, uređaj koji daje usmjereni snop svjetla.

Jednadžba parabole



$d_F = d_D$

$$d_F = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$d_D = y + p$$

$$d_F = d_D$$

$\rightarrow \ \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p \ \ /^2$

$\rightarrow \ \ x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$

$\rightarrow \ \ x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$

$\rightarrow \ \ y = \dfrac{1}{4p}x^2$

Jednadžba parabole je oblika

$$y = ax^2, \ a > 0$$

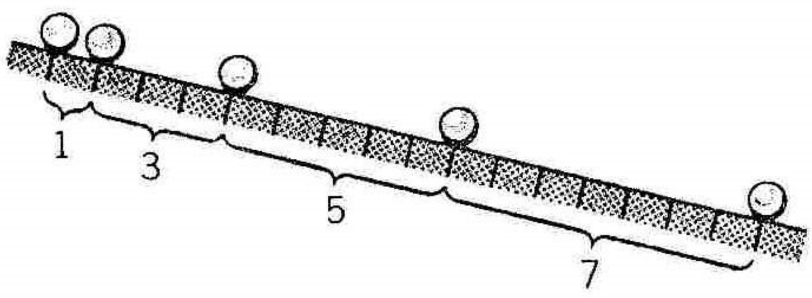
Parabola je graf kvadratne funkcije

$$f(x) = ax^2, \ a > 0$$

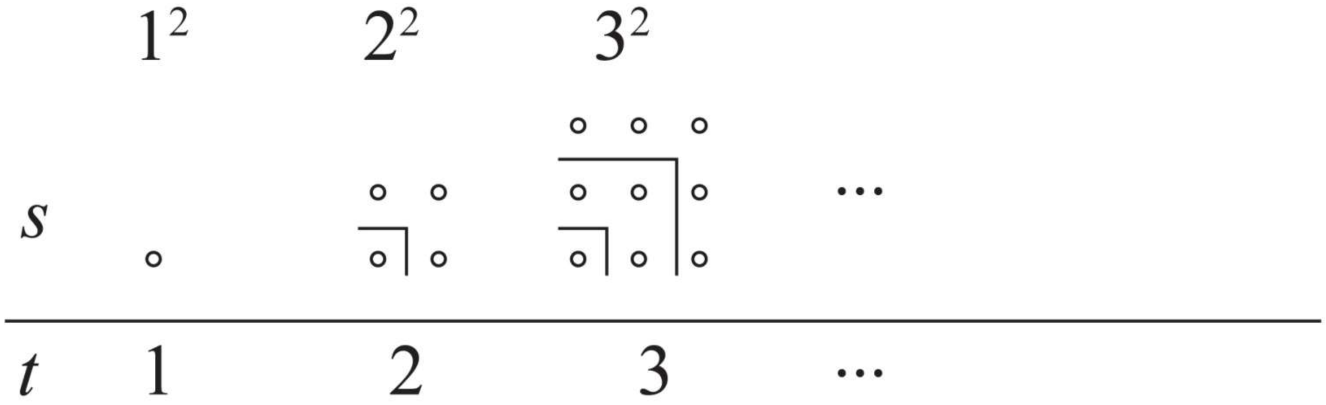
Jednadžba slobodnog pada

Galileo Galilei (1564-1642) je eksperimentalno odredio kako prijeđeni put *s* ovisi o vremenu *t* pri slobodnom padanju tijela. U doba kad nije bilo dobrih instrumenata za mjerenje vremena on je našao način kako da “uspori” to gibanje da bi ga preciznije proučio.

Kotrljanje niz kosinu



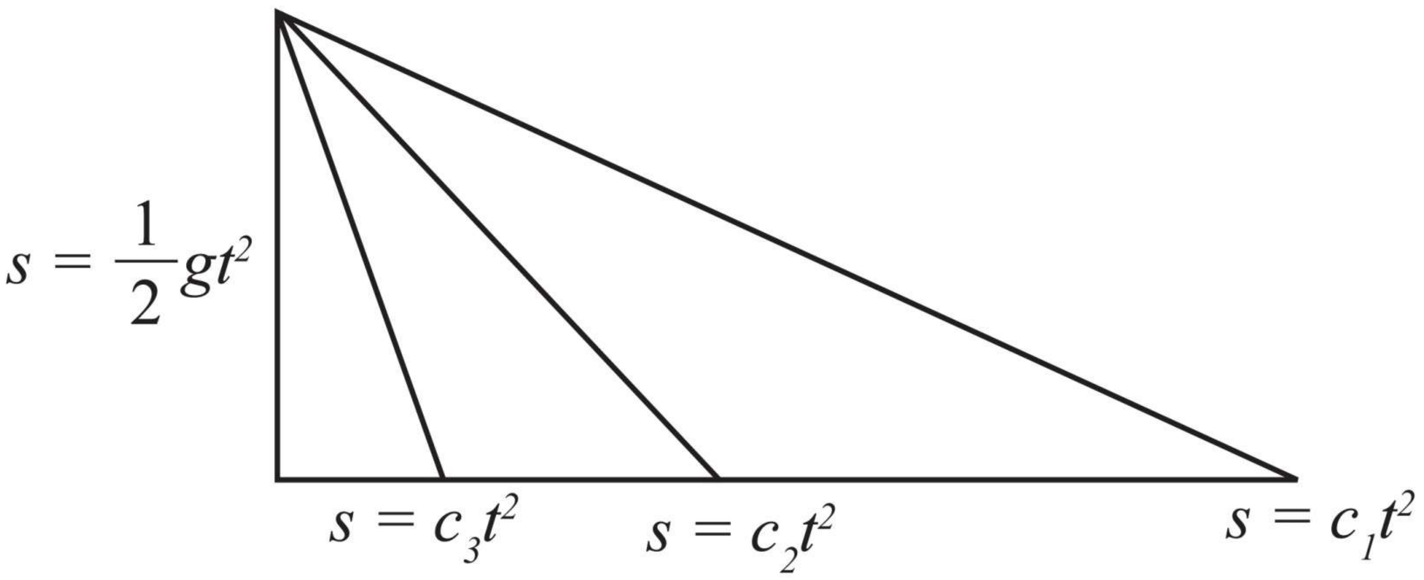
Ako u prvoj jedinici vremena tijelo pređe jedinicu puta, u dugoj jedinici vremena će prijeći 3 jedinice puta, u trećoj 5 jedinica puta…



Dakle u t jedinica vremena tijelo će prijeći $s = t^2$ jedinica puta. To znači da će u standardnim jedinicama put biti proporcionalan kvadratu vremena:

$$s = ct^2, \ \ c > 0$$

Taj će zakon vrijediti i za sve strmije kosine pa na kraju i za okomitu “kosinu”.



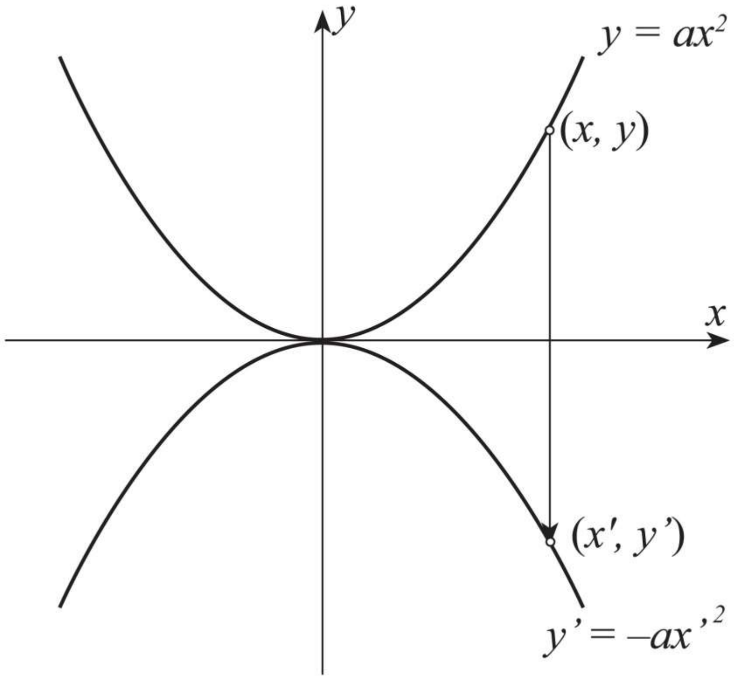
Tako je Galileo zaključio da **sva tijela slobodno padaju po istom zakonu**:

$$s = \frac{1}{2} g t^2, \quad g = 10 m/s^2$$

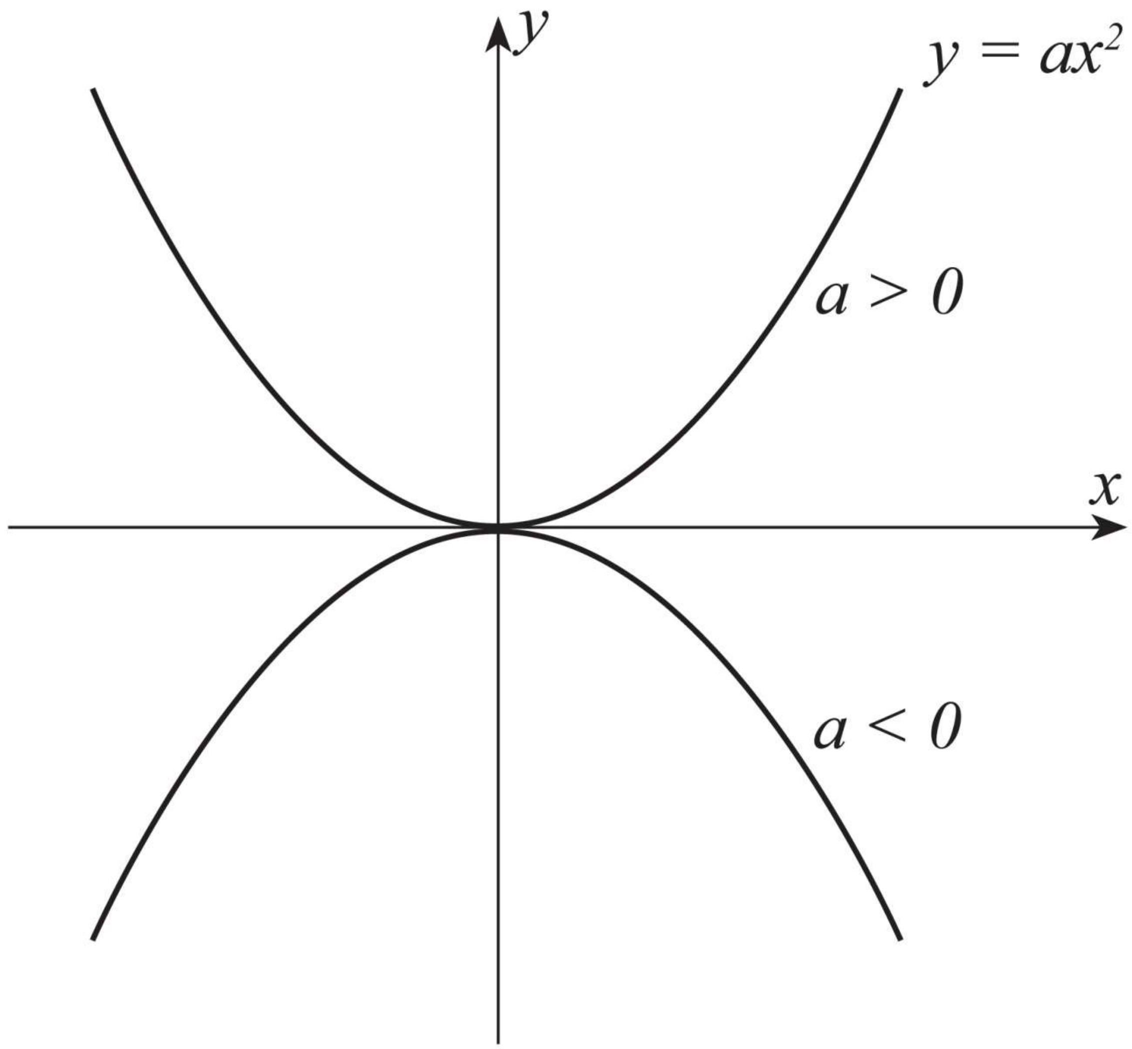
Ovisnost prijeđenog puta o proteklom vremenu kod slobodnog pada je kvadratna funkcija.

Općenitija jednadžba parabole

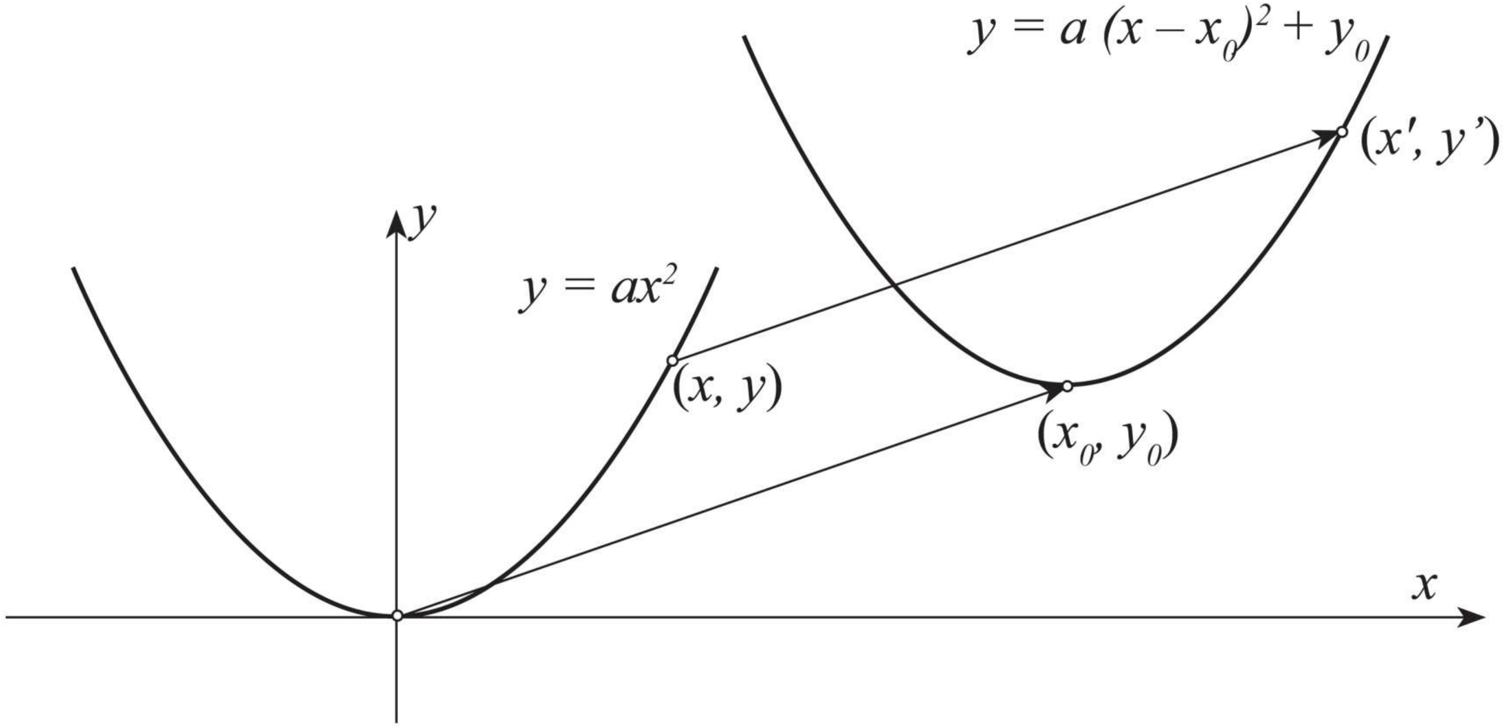
Ako parabolu preslikamo preko x-osi opet ćemo dobiti parabolu:



$$y = ax^2, \qquad y' = -y,\ x' = x \ \rightarrow\ y' = -ax'^2$$


y
y = ax²
a > 0
x
a < 0

Ako parabolu translatiramo u nekom smjeru opet ćemo dobiti parabolu



$$y = ax^2, \qquad y' = y + y_0, \; x' = x + x_0$$

$$\to \quad y' = a(x' - x_0)^2 + y_0$$

Ako izraz na desnoj strani kvadriramo dobit ćemo jednadžbu oblika $y = ax^2 + bx + c$

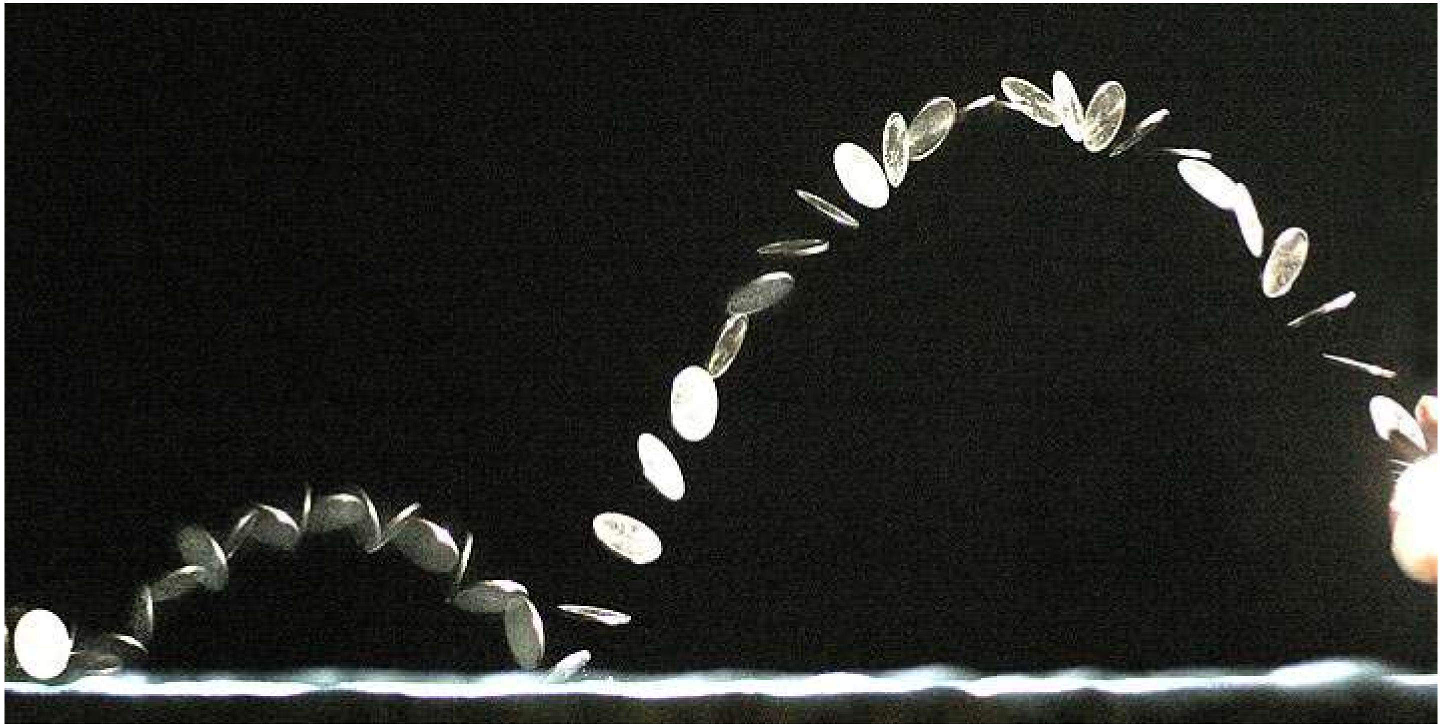
Zaključujemo da su sve jednadžbe oblika

$$y = ax^2 + bx + c$$

jednadžbe parabola.

Putanja bačenog predmeta

Ako bacimo novčić on ima putanju koja podsjeća na parabolu.



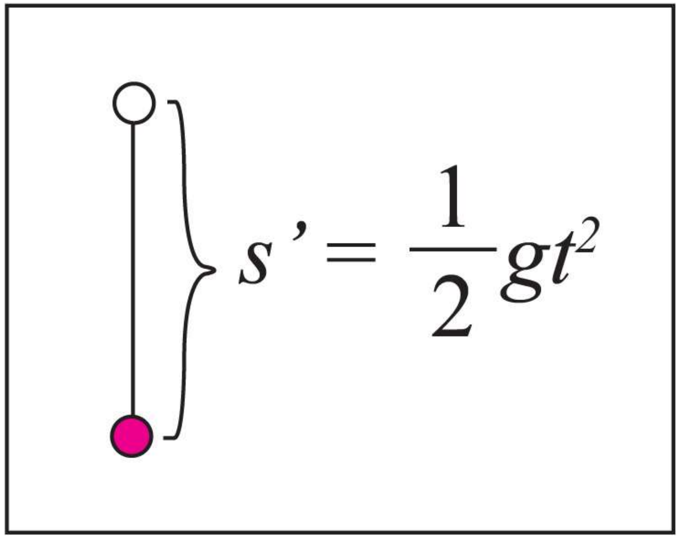
Da bismo to pokazali opet trebamo Galilea.

Galileov princip relativnosti

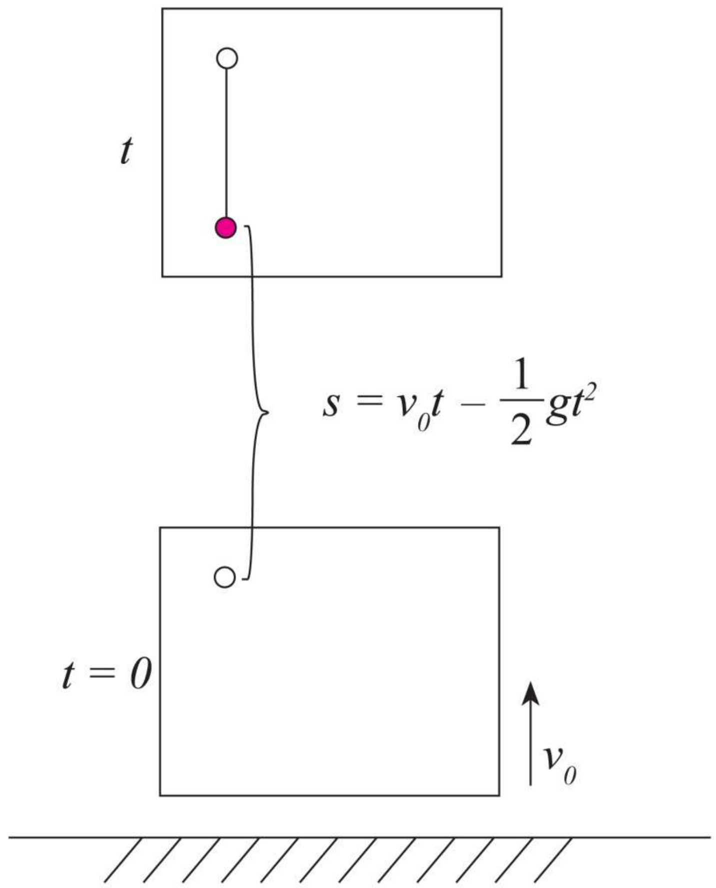
U svim sustavima promatranja koji se gibaju jednoliko jedan u odnosu na drugog zakoni fizike su isti.

Dakle, bilo da promatramo pojave sa zemljine površine ili iz lifta koji se jednoliko podiže ili pak iz jedrilice koja jednoliko plovi opazit ćemo iste fizikalne zakone.

Ako čovjek u liftu koji se giba brzinom v_0 pusti loptu ona će po Galilejevom principu padati prema dolje i u vremenu *t* prijeći će put u liftu $s' = \frac{1}{2}gt^2$



Promatrač sa zemlje vidjet će da je lopta izbačena prema gore brzinom v_0. Okomita udaljenost *s* lopte u odnosu na mjesto izbacivanja jednaka je prijeđenom putu lifta prema gore $s_l = v_0 t$ umanjena za pad predmeta u liftu $s' = \frac{1}{2} g t^2$.

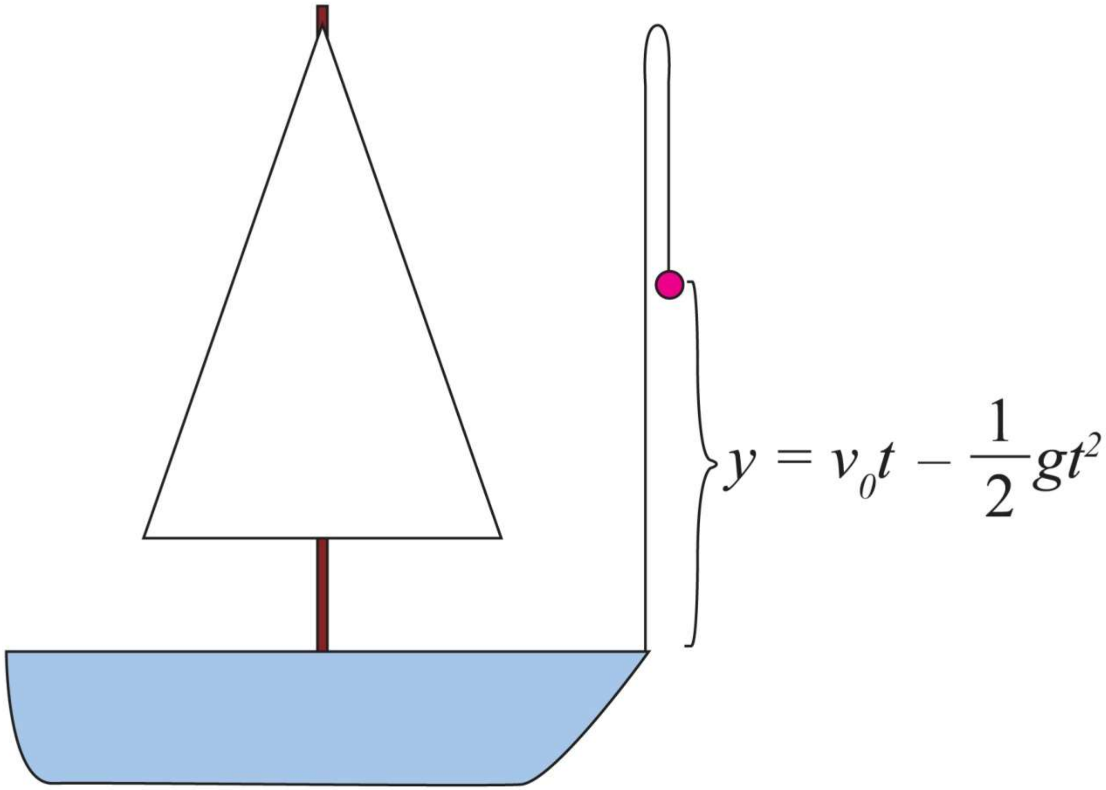


Jednadžba okomitog hica

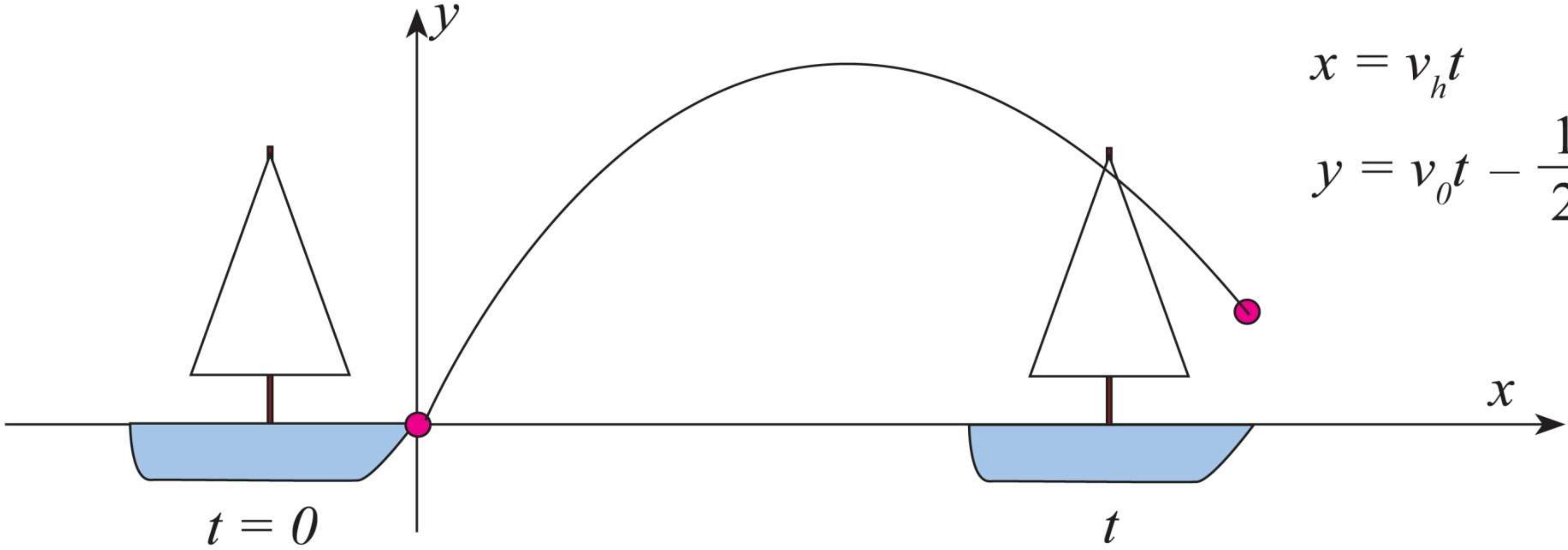
Izbacimo li okomito uvis predmet brzinom v_0, nakon vremena t njegova udaljenost od početnog položaja je

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ista formula će vrijediti i kad čovjek u brodu koji plovi brzinom V_h baci prema loptu prema gore.



Gledano s obale lopta će mijenjati svoj horizontalni položaj zajedno s brodom tako da će se u trenutku *t* nalaziti na mjestu s koordinatama *x* i *y*:



$$x = v_h t$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Jednadžbu putanje ćemo naći tako da iz ovog sustava jednadžbi eliminiramo vrijeme *t*:

$$x = v_h t, \qquad y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{x}{v_h}$$

$$\rightarrow \quad y = v_0 \frac{x}{v_h} \; - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_h}\right)^2$$

Jednadžba putanje: $y = \frac{v_0}{v_h} x - \frac{1}{2} \frac{g}{{v_h}^2} x^2$

To je jednadžba oblika $y = ax^2 + bx + c$. Dakle

Putanja predmeta koji je bačen koso uvis i na kojeg djeluje samo gravitacijska sila je parabola.

boris.culina@vvg.hr