GEOMETRIJA
NA ZEMLJINOJ POVRŠINI

Boris Čulina
Veleučilište Velika Gorica

Cilj predavanja je relativizirati učeniku euklidsku geometriju

- pokazavši mu da **postoje i drugačije geometrije.**

- navodeći ga da se upita **kakva je geometrija stvarnog svijeta.**

Kao što je dobro da učenik zna euklidsku geometriju isto tako je dobro da razumije da postoje i druge geometrije i da izvan nekih granica ispravnost euklidske geometrije postaje upitna.

Kojim putem letjeti ili ploviti?

- **najkraćim**

- **ravnim**

Najkraći i ravan put u ravnini ili prostoru od točke A do točke B je put po pravcu koji spaja te točke.

Koji je najkraći i ravan put po Zemljinoj površini?

Radi jednostavnosti Zemljinu ćemo površinu zamisliti kao sferu.

Eksperimentirajmo pomoću geografskog globusa, vrpci i selotejpa.

Zagreb i Portland su približno na istoj paraleli (oko 45° sjeverne geografske širine). Je li put po paraleli najkraći put između tih gradova?

Ne. Najkraći put vodi dosta sjevernije, preko Grenlanda (preko 60° sjeverne geografske širine).

Primijetimo da je put po paraleli put duž kojeg je smjer kompasa isti (stalno idemo prema zapadu) dok se po najkraćoj liniji smjer mijenja.

- Odredimo najkraći put od Southamptona do New Yorka i usporedimo ga s putem duž kojeg je smjer kompasa stalan.
- Southampton je bio polazište zadnjeg Titanicovog putovanja a New York nikad dostignuto odredište.

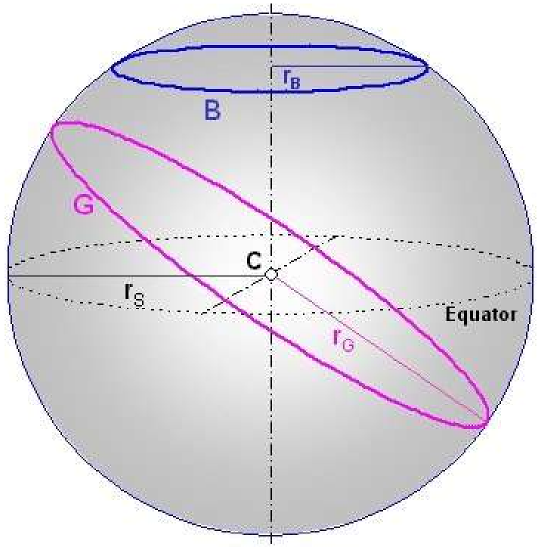
- Najkraći put je nešto sjevernije od puta stalnog smjera kompasa kojim, radi jednostavnog upravljanja, brodovi obično plove. Za manje udaljenosti ti se putovi ionako puno ne razlikuju.
- Za bilo koje točke na sjevernoj polutci najkraći put je sjevernije od puta stalnog smjera kompasa.

- To je dovelo do hipoteze da je Titanic potonuo jer je plovio nešto sjevernije od uobičajene rute da bi, ploveći kraćim putem, oborio rekord brzine putovanja, pa je tako naletio na sante leda. Istina je da on uopće nije išao sjevernije već su drugi uzroci potonuća.

- U mnogim religijama vjernici se mole u smjeru prema nekom svetištu. Tako se muslimani mole okrenuti prema Meci. Ali je li to u smjeru najkraćeg puta prema Meci ili u smjeru puta stalnog smjera kompasa? U kojem smjeru trebaju moliti vjernici u Philadelphiji?

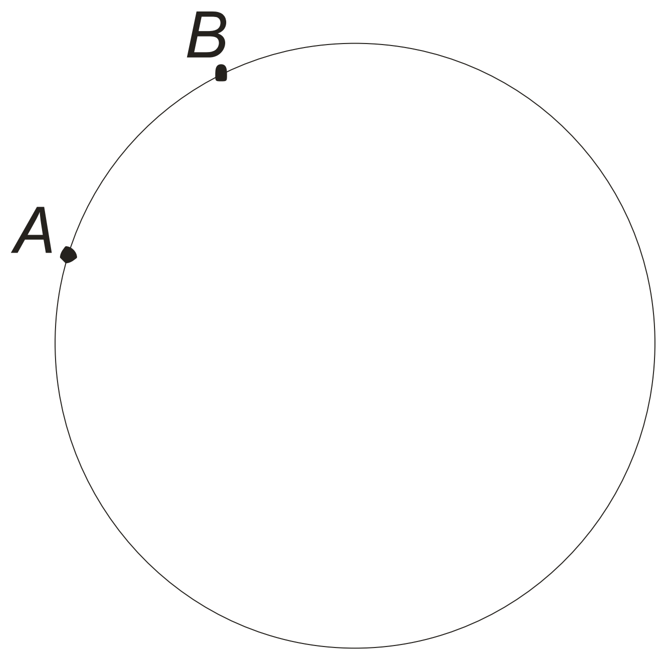
- Za vjernike u Philadelphiji odgovori se drastično razlikuju. Po jednom izboru vjernici moraju biti okrenuti sjeveroistočno a po drugom jugoistočno. Ovo je dovelo do podjele u muslimanskoj zajednici u Philadelphiji koja još traje. Paradoksalno je da su već davno baš arapski matematičari dali pravi odgovor.

Najkraći i najravniji put je po **ortodromi**. To je dio tzv. **velike kružnice**, kružnice kojoj je centar u središtu Zemlje.

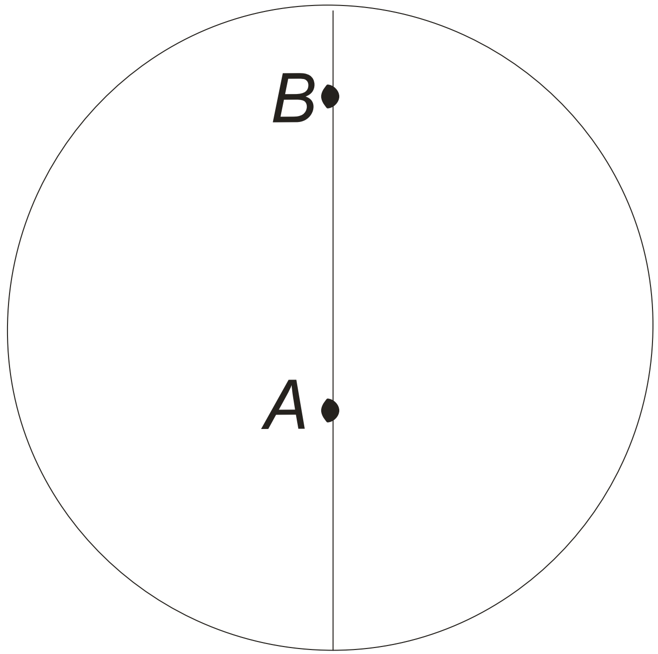


U to se možemo eksperimentalno uvjeriti tako da produžujemo najkraći put. Vratit ćemo se u točku od koje smo krenuli, dakle dobit ćemo kružnicu, i to baš onu kojoj je centar u središtu sfere.

Uvjerimo se u to i sljedećim razmatranjem. Da bismo otkrili najkraći put iz točke *A* u točku *B* postavimo sferu tako da su obje točke na horizontu. Najkraći put je po horizontu, dakle po dijelu velike kružnice.



Da bismo otkrili koji je put ravan postavimo sferu tako da spojnica točaka *A* i *B* dijeli horizont na dva jednaka dijela. Budući da i središte kružnice leži na toj prividnoj spojnici ona odgovara dijelu velike kružnice.

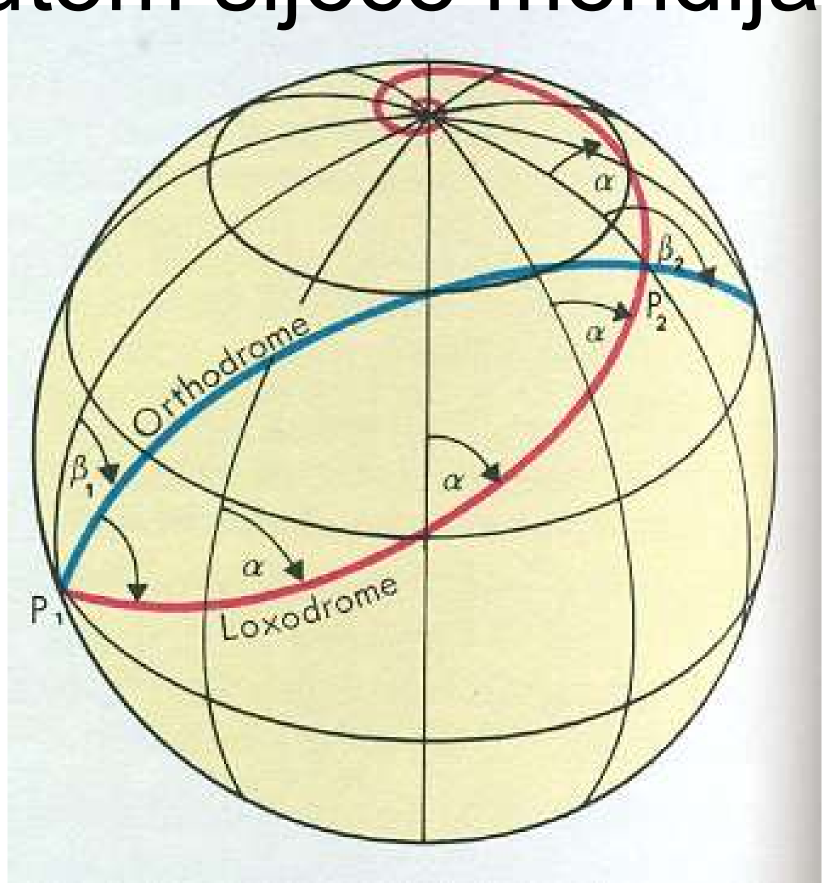


I fizika daje isti odgovor. Izbacimo li neki predmet sa Zemljine površine on će se pod utjecajem Zemljine gravitacije kretati u ravnini koja prolazi kroz središte Zemlje. Ako se pri tom nalazi na Zemljinoj površini on je tad na presjecištu te ravnine i Zemljine površine – na velikoj kružnici.

Svi meridijani su dijelovi velike kružnice a od paralela je to jedino ekvator. Svatko će se složiti da je najkraći i ravan put između dvije točke na istom meridijanu upravo put po tome meridijanu. No tada svatko mora prihvatiti da je i najkraći i ravan put između dvije točke *A* i *B* po velikoj kružnici koje spajaju te točke.

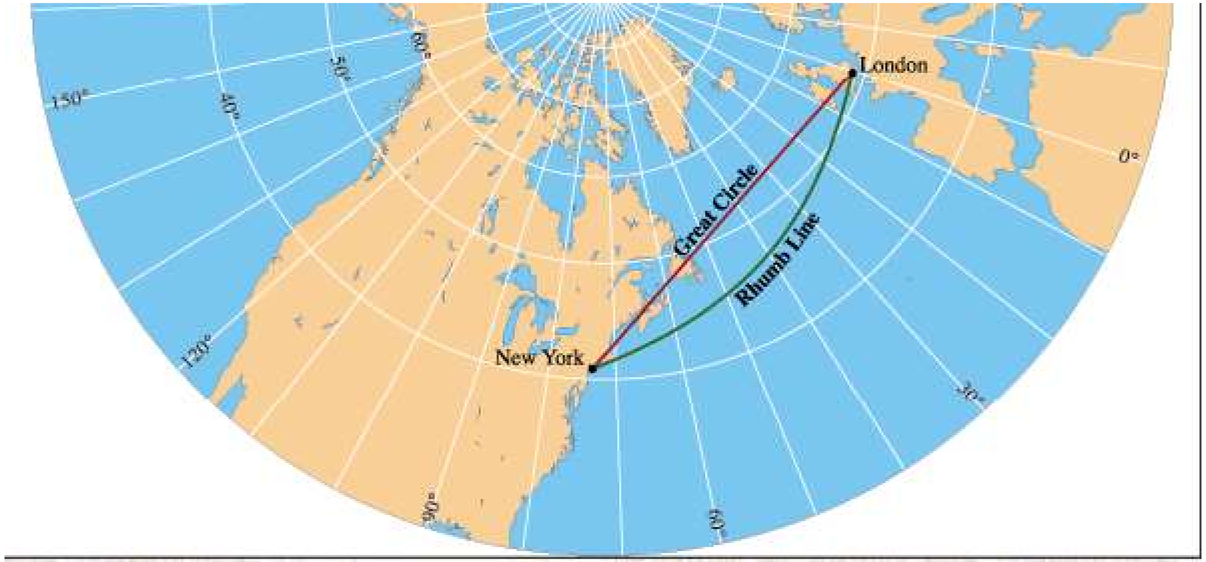
Naime, za geometriju sfere sjeverni i južni pol nemaju nikakvo istaknuto značenje. Oni imaju specijalnu ulogu u rotaciji zemljine površine i u orijentaciji Zemljinog magnetskog polja. Zato, što se tiče sferne geometrije, možemo izabrati nove polove takve da se A i B nalaze na istom meridijanu u odnosu na te polove, pa je najkraći put po tom meridijanu, dakle po luku velike kružnice koja prolazi tim točkama.

Zašto se mnogima ipak čini da je najkraći i najravniji put po **loksodromi**, krivulji koja pod stalnim kutom siječe meridijane i paralele?



Razlog je što se Zemljina ploha obično prikazuje tzv **Mercatorovom geografskom kartom**, koja nastaje “napuhivanjem“ sfere na plohu valjka.

Mercatorova projekcija je dobra jer čuva (vjerno prikazuje) kutove, pa tako lokalno čuva i oblik. Nedostatak joj je što ne čuva (deformira) mjere dužina i površina. U toj projekciji loksodroma prelazi u pravac a ortodroma u zakrivljenu liniju. To može dovesti do pogrešne predodžbe da su loksodrome ravne i najkraće linije, a ortodrome dulje i zakrivljene.



London
Great Circle
Rhumb Line
New York
150°
120°
90°
60°
30°
0°
40°
50°
60°

150°
120°
90°
60°
30°
0°
30°
60°
30°
0°
London
Great Circle
Rhumb Line
New York

Osnovni problem kartografije je da sferu nije moguće prenijeti na ravan papir bez deformiranja.

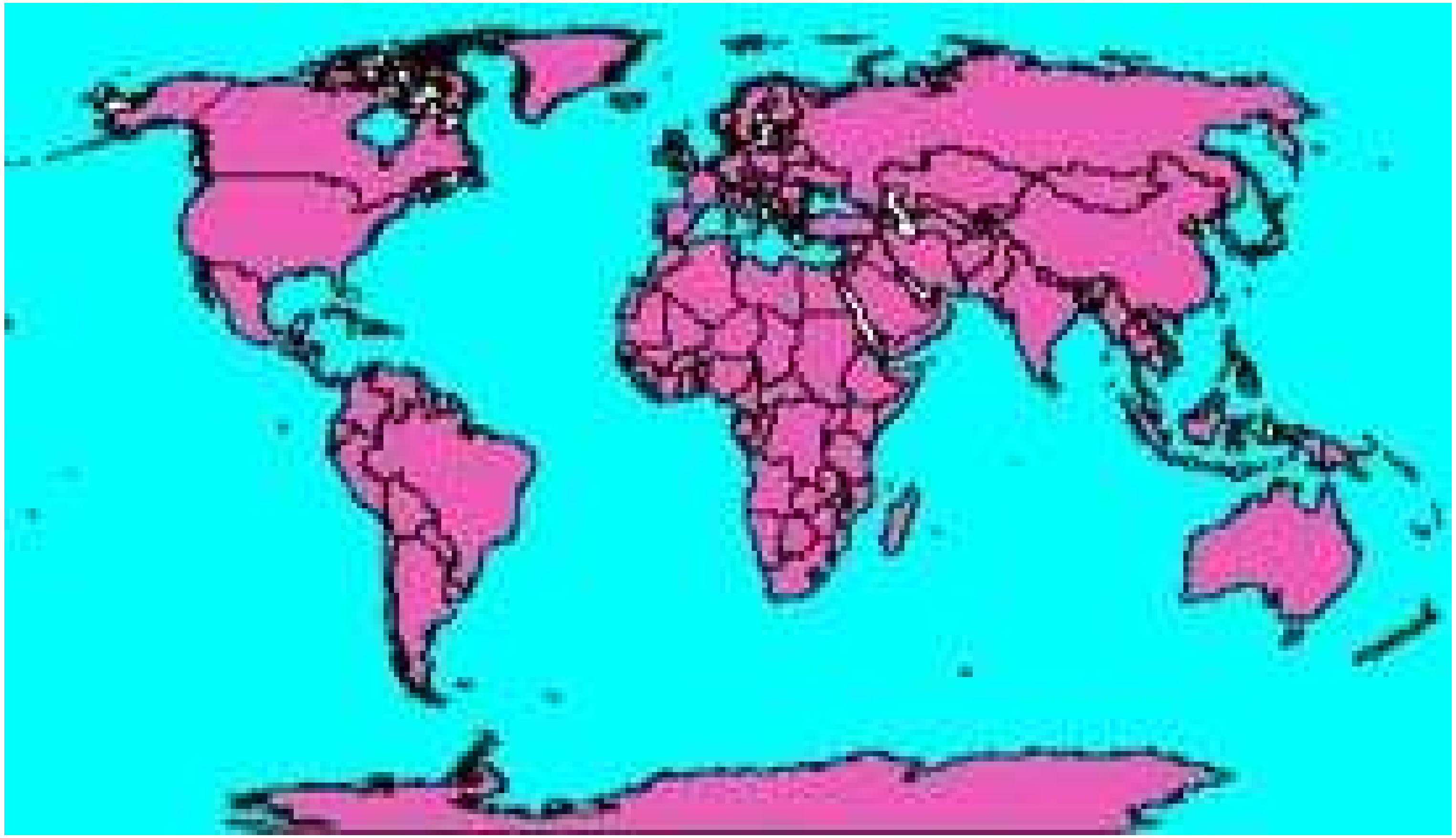
Mercatorova karta čuva kutove ali ne i duljine. Ona je veoma korisna pomorcima jer su na njoj pravci putanje duž kojih je smjer kompasa stalan.

Nasuprot tome **gnomoničke karte** čuvaju udaljenosti ali ne i oblik. One nastaju centralnom projekcijom iz centra sfere na tangencijalnu ravninu sfere. Na njoj su pravci dijelovi velike kružnice, najkraće linije između točaka koje spajaju. One se koriste za avionske letove na velikim udaljenostima.

Kakve karte koristiti u nastavi?

Sedam sjevernoameričkih profesionalnih nacionalnih organizacija je 1989. godine donijelo rezoluciju da Mercatorovu i slične karte treba izbaciti iz nastave jer takve karte navode na bitno pogrešne koncepcije o Zemljinoj površini iskrivljavajući oblike i veličine velikih površina i pogrešno prikazujući udaljenosti i najkraće puteve.

Jedna od predloženih projekcija (sjetimo se da nema idealne projekcije) je **Robinsonova karta**.



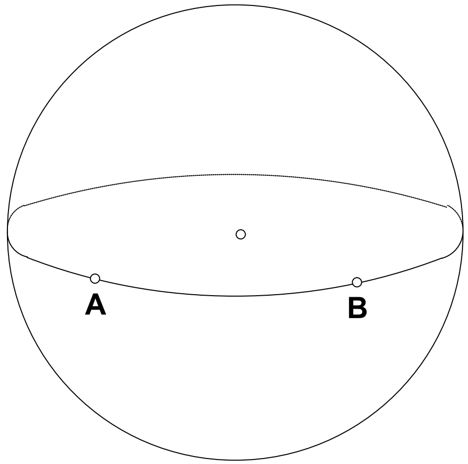
Zaključak: Što su nam pravci u ravnini ili prostoru to su nam velike kružnice na Zemljinoj površini.

Za pravce u ravnini vrijedi:

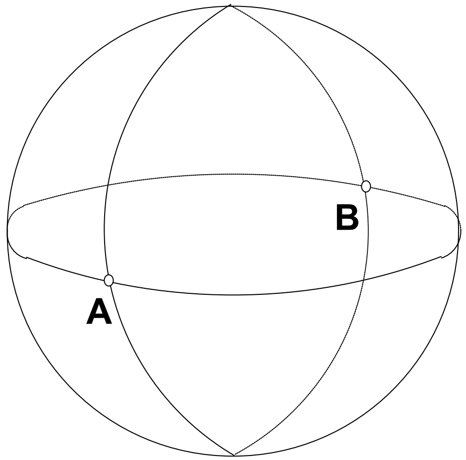
- **Kroz dvije točke možemo provući točno jedan pravac**.
- **Kroz točku van pravca možemo provući točno jedan pravac koji ga ne siječe.**
- **Dva se pravca ili ne sijeku ili se sijeku u jednoj točki.**

- Vrijede li ta svojstva i za velike kružnice? Eksperimentirajmo.

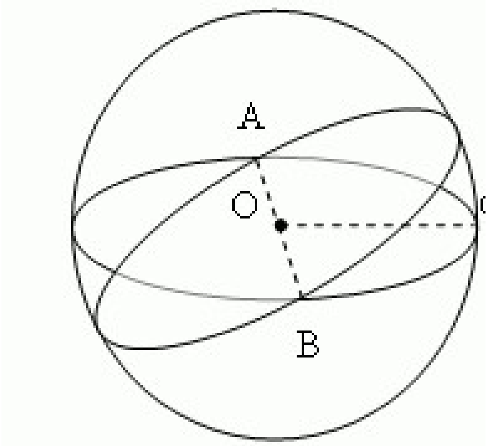
- Za dvije točke na sferi kažemo da su **antipodalne** ako dužina koja ih spaja sadrži središte sfere.



Kroz dvije točke koje nisu antipodalne možemo provući točno jednu veliku kružnicu. Zaista, kroz dvije takve točke na kružnici i središte kružnice prolazi točno jedna ravnina. Njeno presjecište sa sferom je jedinstvena velika kružnica kroz te točke.



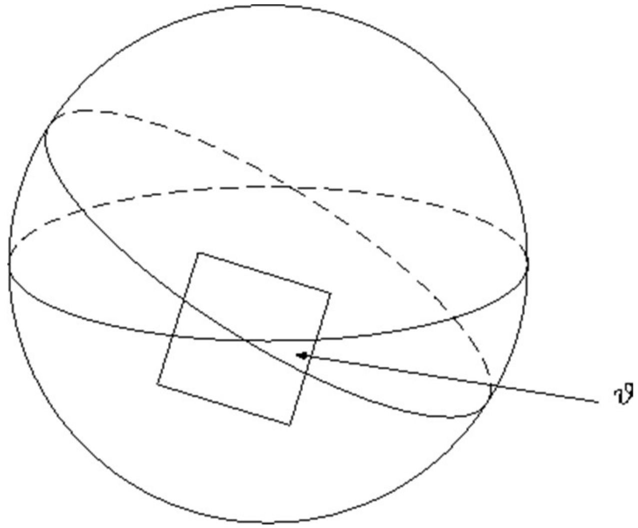
Kroz antipodalne točke možemo provući beskonačno velikih kružnica. Zaista, kroz antipodalne točke na kružnici i središte kružnice prolazi beskonačno ravnina jer te tri točke leže na istom pravcu. Presjecište sa sferom svake od ravnina koje sadrže taj pravac je velika kružnica kroz te točke.



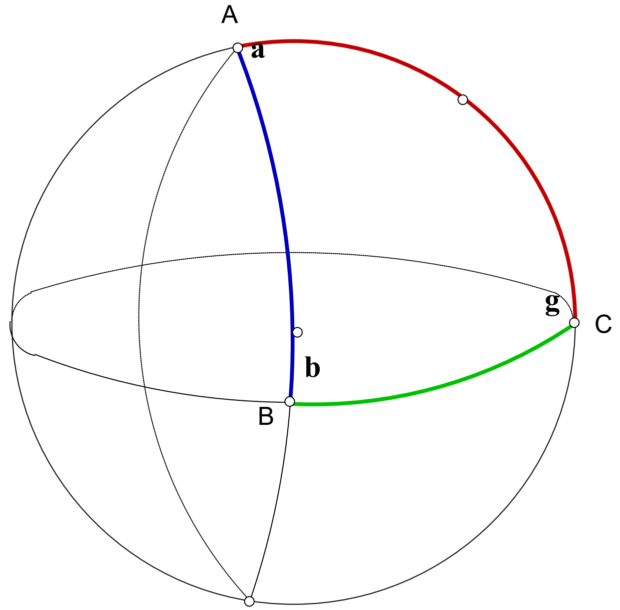
Nema paralelnih velikih kružnica.

Dvije velike kružnice se sijeku u dvjema međusobno antipodalnim točkama.

Zaista, velike kružnice su presjecišta ravnina koje imaju zajedničku točku, središte kružnice. Ravnine koje imaju zajedničku točku sijeku se po pravcu. Taj pravac probada sferu u antipodnim točkama koje pripadaju objema ravninama, pa tako i objema velikim kružnicama.



Kao što možemo govoriti o kutu između dva pravca koja se sijeku tako možemo govoriti i o **kutu na sferi** između dvije velike kružnice. To je kut između ravnina koje sadrže te kružnice.



Kao što je trokut dio ravnine omeđen trima dužinama, tako je **trokut na sferi** dio sfere omeđem trima ortodromama. Koliki je zbroj veličina kutova takvog trokuta? Možemo li trokut povećavati tako da zadrži oblik. Eksperimentirajmo.

Suma kutova u sfernom trokutu je veća od 180^0.

Sljedeći teorem nam to kazuje na precizniji način. Teorem je otkrio Albert Girard 1626. godine u radu u kojem se prvi put spominju oznake sin, cos i tan za trigonometrijske funkcije.

Girardov teorem. Površina P i kutovi α, β i γ trokuta na sferi radijusa R povezani su sljedećom formulom:

$$P = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)\, R^2$$

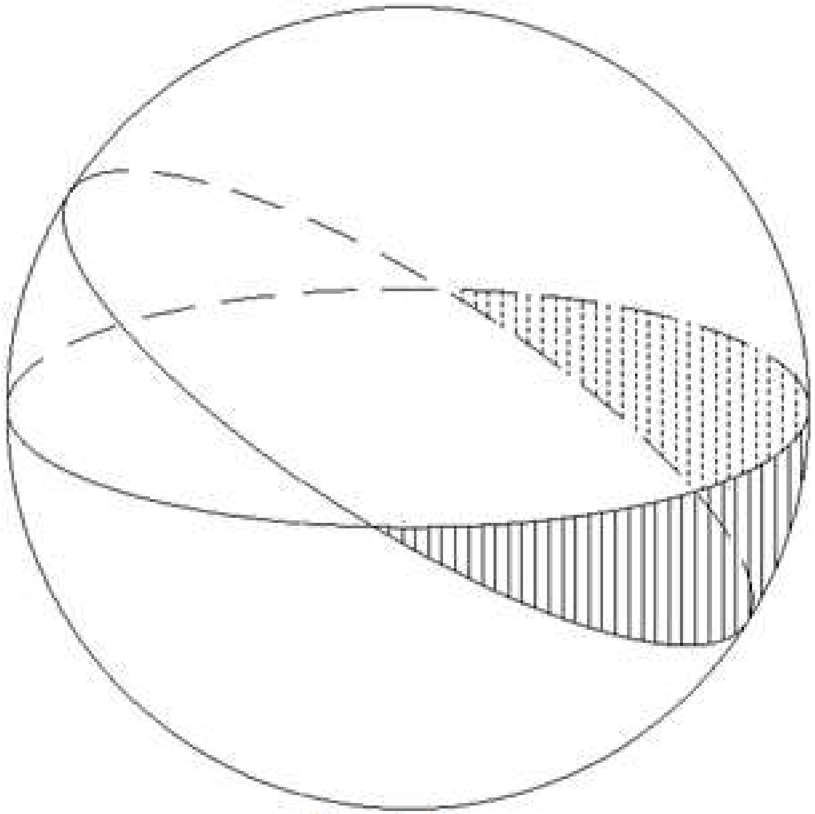
Dokaz. Koristit ćemo formulu za površinu P sfere radijusa R

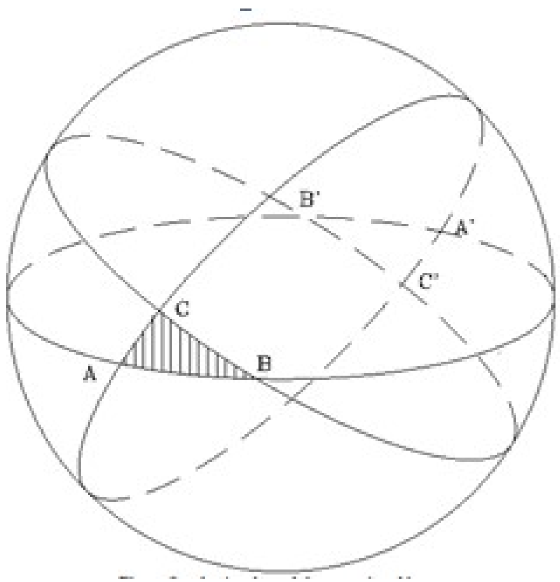
$$P = 4\,R^2\,\pi$$

Pošto na cijeli ekvator kojem pripada središnji kut od 2 π otpada tolika površina, onda će površina koja pripada dijelu ekvatora kojem je središnji kut α, tzv. **luna** biti proporcionalno manja:

$$\frac{P_\alpha}{P} = \frac{\alpha}{2\pi} \;\rightarrow\; P_\alpha = P \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = 4R^2\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha R^2$$

Površina lune: $P_\alpha = 2\alpha R^2$





Površinu donje sfere ograničene krugom BCB'C' prikazat ćemo pomoću površina luna i iscrtanog trokuta.

$$P_{BCB'C'} = 2R^2\pi \qquad P_{BCB'C'} = 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 - P_{ABC} + 2\alpha R^2 - P_{A'B'C'}$$

$$\rightarrow \quad 2R^2\pi = 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 - P_{ABC} + 2\alpha R^2 - P_{A'B'C'}$$

$$P_{A'B'C'} = P_{ABC}$$

$$\rightarrow \quad 2R^2\pi = 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 - 2P_{ABC} + 2\alpha R^2$$

$$\rightarrow \quad P_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

QED

POSLJEDICE

Ne postoji projekcija sfere na ravninu koja pretvara velike kružnice u pravce i čuva kutove.

Kad bi postojala takva projekcija sferni trokut bi preslikala u običan trokut u ravnini za kojeg bi vrijedila Girardova formula $P_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$ a znamo da to nije istina za običan trokut.

Zbroj kutova u sfernom trokutu je veći od 180°.

Zaista, Girardova formula nam kaže da je $\alpha + \beta + \gamma - \pi > 0$

Sferne trokute možemo premještati bez deformiranja ali ih ne možemo povećavati i smanjivati bez deformiranja.

Rotacija oko centra sfere preslikava sferni trokut u trokut s istim kutovima i duljinama stranica. Kod transformacije sličnosti koja nije premještanje kutovi bi morali ostati isti a površina se promijeniti, što je u kontradikciji sa Girardovim teoremom.

Za manje udaljenosti sferni se trokuti ne razlikuju puno od ravninskih trokuta. Zato u svakodnevnim situacijama koristimo geometriju ravnine a ne geometriju sfere.

$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \dfrac{P_{ABC}}{R^2} \to 0$ za manju površinu pa je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Šta je sa geometrijom u prostoru? Produžimo li pravce u svemir prema zvijezdama, hoće li oni zadržati svojstva koja imaju na malim udaljenostima ili će se ponašati drugačije, npr. savijati i vratiti se možda u istu točku odakle su “krenuli”?

boris.culina@vvg.hr