

# Kvalitativni, analitički i numerički pristup u nastavi matematike

Boris Čulina, Veleučilište Velika Gorica  
boris.culina@vvg.hr

Sanja Vitaljić, Druga gimnazija, Split  
svitalji@gmail.com]

**Analitički pristup rješavanju problema:**

logičkim razmišljanjem i simboličkim računanjem doći do egzaktnog rješenja problema

**Kvalitativni pristup rješavanju problema:**

zaključiti nešto o rješenju a da se ono stvarno ne nađe

**Numerički pristup rješavanju problema:**

naći numeričko rješenje problema do na traženu točnost.

## **Primjer kombiniranog kvantitativnog, analitičkog i numeričkog rješavanja jedne jednadžbe s jednom nepoznanicom**

Većina jednadžbi u srednjoj školi je naštimana da se može analitički riješiti.

Vrlo malu promjenu treba napraviti da bismo od jednadžbe koju je lako riješiti dobili jednadžbu koju je nemoguće analitički riješiti.

Takav je npr. prijelaz s najjednostavnije trigonometrijske jednadžbe npr.  $\cos x = \frac{1}{2}$  na jednadžbu  $\cos x = x$  koju je nemoguće analitički riješiti.

*No kvalitativan pristup nam lako daje koliko ima rješenja i gdje se nalaze. Analitičkim i numeričkim pristupom možemo identificirati ta rješenja.*

## **Kvalitativan pristup u rješavanju jednađbi:**

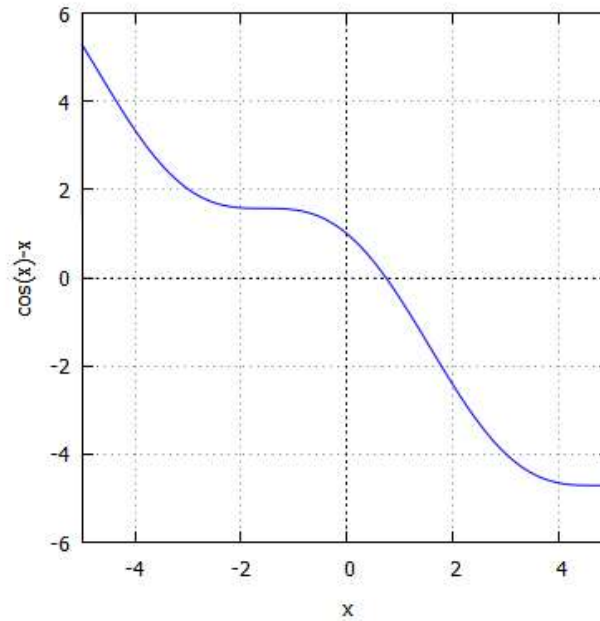
Svaku jednađbu možemo prebacivanjem svih članova na lijevu stranu svesti na oblik  $f(x) = 0$ .

To znači da su rješenja jednađbe isto što i nul-točke funkcije  $f(x)$ .

A njih je iz grafa funkcije (upotrebom software-a) lako kvalitativno odrediti – to su zajedničke točke grafa funkcije i  $x$  – osi.

*Na taj način imamo jednostavan postupak kojim možemo kvalitativno riješiti sve jednađbe! A to nije mala stvar.*

Tako ćemo kvalitativno riješiti jednadžbu  $\cos x = x$  .  
Prebacimo  $x$  na lijevu stranu jednadžbe:  $\cos x - x = 0$   
i nacrtajmo funkciju  $f(x) = \cos x - x$ :



Vidimo da jednadžba ima jedno rješenje i da je ono negdje oko 1.

## **Numerički pristup u rješavanju jednadžbi:**

Ako je učeniku jasan smisao numeričkog postupka kao nalaženja sve bolje aproksimacije pravog rješenja,

ako mu je jasan jedan konkretan takav postupak, npr. metoda polovljenja koju je veoma jednostavno objasniti i implementirati, npr. u Excelu,

tada učenik može upotrijebiti odgovarajuću naredbu koja mu *za danu jednadžbu u danom intervalu daje rješenje do na zadanu točnost.*

Ako npr želimo do na dvije decimale točno naći rješenje jednadžbe  $\cos x = x$  za koje smo kvalitativno odredili da se nalazi u intervalu od 0 do 2 u software-u Maxima utipkat ćemo sljedeću naredbu:

```
find_root(cos(x) = x, x, 0, 2, abserr = 0.01);
```

Dobit ćemo 0.7384368383172162.

S obzirom na zahtijevanu točnost, rješenje je  $x = 0.74$ .

## **Stanje u našem sustavu matematičkog obrazovanja:**

dominira analitički pristup,  
dok je zanemaren kvalitativni i numerički pristup

*Višestruki su negativni učinci takvog pristupa.*



1. Analitičkom pristup zna biti kompliciran i pun specijalnih tehnika koje su u primjeni ograničene a u izvršenju dugotrajne.

**Posljedica:** negativno djeluje na razvoj učenikova zanimanja za matematiku - matematika se svodi na formalnu kombinatoriku upotrebe specijalnih tehnika i mehaničku upornost u njihovom izvršenju.

2. Većina problema se uopće ne može analitički riješiti ili je analitički načini rješavanja prekomplikiran.

**Posljedica:** postavlja umjetne granice na rješavanje problema i ograničava učenikov razvoj na tako ograničene probleme i tehnike rješavanja.

## **Kvalitativan pristup** obično

1. daje jednostavan aparat (najčešće je to neka vrsta vizualizacije) kojim možemo jednostavno saznati neka kvalitativna svojstva rješenja problema
2. pomaže u razvijanju ispravne intuicije o području iz kojeg dolazi taj tip problema

## **Numerički pristup**

1. razvija kod učenika numerički način razmišljanja zasnovan na ideji aproksimacije i pojmu točnosti aproksimacije
2. razvija kod učenika numerički pristup rješavanju problema, koji je često i algoritamski pristup rješavanju problema
3. sadrži matematički bitan i moćan aparat numeričkih ideja, principa i tehnika

## Usvajanje kombiniranog kvalitativnog, analitičkog i numeričkog pristupa

- 1. učeniku daje načine za rješavanje daleko šireg skupa problema,*
- 2. Učenik razvija nove bitne elemente matematičkog načina razmišljanja*
- 3. adekvatno priprema učenika za stvarnu upotrebu matematike u njegovoj budućoj struci.*

## **Zaključak:**

Smatramo veoma važnim za matematičko obrazovanje da se, za razliku od sadašnjeg stanja, na svim nivoima obrazovanja povede adekvatna briga i o kvalitativnoj i o numeričkoj komponenti matematike.

Valja napomenuti da kvalitativni i numerički pristup obično podrazumijevaju odgovarajući software da bi se mogli efektivno izvesti. Zbog toga, kao i zbog drugih sadržaja u nastavi, danas postaje nužno razmisliti kakav matematički software bi valjalo dizajnirati za potrebe našeg sustava obrazovanja.