

# POJAM FUNKCIJE U NASTAVI MATEMATIKE

## prijedlozi za razmatranje

dr.sc. Boris Čulina  
Veleučilište Velika Gorica  
[boris.culina@vvg.hr](mailto:boris.culina@vvg.hr)

- **Pojam funkcije je jedan od temeljnih matematičkih pojmova, veoma značajan unutar same matematike kao i u primjeni matematike:**

– Matematika se može zasnovati na pojmu funkcije

- Skupovno zasnivanje (Cantor, Frege, Zermelo)

$$U(x) \mapsto \{x \mid U(x)\}$$

$$a \in \{x \mid U(x)\} \leftrightarrow U(a)$$

- Funkcijsko zasnivanje (Church, Curry):

$$f(x) \mapsto (\lambda x. f(x))$$

$$(\lambda x. f(x))a = f(a)$$

## – Bitan je element matematičkog strukturiranja

- **Matematička apstrakcija 1:** ideje i zamisli modeliramo tako da izdvojimo određene skupova, relacije i funkcije među njima i popišemo njihova svojstva (aksiome)

**Primjer:** što su prirodni brojevi?

**Specifikacija** (Dedekind) Skup  $N$  sa istaknutim elementom  $0$  (nula) i funkcijom  $S: N \rightarrow N$  (sljedbenik) takvim da vrijede Peanovi aksiomi (koji pripadaju Grassmannu):

1.  $\forall n S(n) \neq 0$
2.  $\forall n, m S(m) = S(n) \rightarrow m = n$
3.  $\forall A \subseteq N (0 \in A \wedge \forall n (n \in A \rightarrow S(n) \in A) \rightarrow A = N)$  (princip ind.)

**Realizacija:**

crtice na papiru ili čvorovi na užetu

Von Neumann:

$$0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0,1\}, 3 = \{0,1,2\}, \dots, S(n) = n \cup \{n\}$$

- **Matematička apstrakcija 2:** I klasa struktura određenog tipa (npr. vektorski prostori) ima svoju strukturu tzv. **kategoriju** (McLane): strukture su povezane morfizmima, funkcijama koje čuvaju njihova strukturna obilježja.
- **Matematička apstrakcija 3:** Cijelu matematiku možemo razumjeti kao strukturu sastavljenu od kategorija i funktora, funkcija koje čuvaju strukturna obilježja kategorija.

– **Pojam funkcije izražava ideju transformacije:**

- Operacije s brojevima (zbrajanje kao binarna funkcija)
- Geometrijske transformacije (zrcaljenja)
- Transformacije problema (logaritmi, Fourierove transf.)
- Transformacije struktura
- Kodiranje i šifriranje
- Simetrija = invarijantnost na transformaciju (Weyl)

## – Pojam funkcije izražava ideju ovisnosti

- Ovisnost među veličinama izražavamo funkcijama počevši od Galileovog zakona slobodnog pada

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

pa do recimo Planckova zakona zračenja crnog tijela

$$I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

- Stanje svakog dinamičkog sustava je funkcija vremena  
Otkrivanjem tih funkcija predviđamo budućnost

## – Pojam funkcije nosi algoritamski sadržaj

- **Algoritmi** realiziraju funkcije (iako ne možemo tako realizirati sve funkcije)
- Svaki **program** računa neku funkciju (iako ne možemo isprogramirati sve funkcije, a za neke su programi prekomplikirani)
- Funkcije su osnova **funkcijskog programiranja** (koje potječe iz Churchova  $\lambda$  računa) u kojem se problem ne rješava nizom naredbi već se opiše funkcija koja rješava problem. To su programski jezici (LISP, Haskell, Microsoftov F#) koji u složenijim situacijama, a te su sve prisutnije, pokazuju definitivnu prednost u odnosu na standardne imperativne programske jezike (Pascal, C, Visual Basic, Java..)



**– Cijele dijelove matematike možemo razumjeti kao aparat za opis funkcija**

- Teorija grupa je u osnovi teorija grupa transformacija (bijektivnih funkcija)
- Linearna algebra je teorija linearnih funkcija
- Matematička analiza je teorija neprekidnih, pogotovo derivabilnih, funkcija
- Diferencijalne jednačbe su glavni praktičan način za opis funkcija u znanosti i tehnici
- Teorija rekurzija je teorija opisa funkcija na diskretnim strukturama koja ima značajne primjene u modeliranju i programiranju

- **Pojam funkcije je veoma važan u nastavi matematike** zbog njegovog značaja za matematiku i njenu primjenu
  - funkcijsko razmišljanje daje posebnu dimenziju matematičkom obrazovanju
  - Omogućuje bolje razumijevanje i efikasnije postupke u drugim nastavnim sadržajima
  - Bolje priprema učenika za buduća matematička znanja i primjene matematike

**Kritika postojećeg stanja:** Iako u Nacionalnom okvirnom kurikulumu stoji

- za osnovnu školu
  - prikazati jednostavnu ovisnost dviju veličina (linearna, čista kvadratna, drugi korijen) riječima, tablicom pridruženih vrijednosti, formulom i grafički, opisati takve prikaze te ih prevesti s jednoga na drugi
- Za strukovne škole
  - opisati i izvesti jednostavne ovisnosti (veze) dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima; prevesti iz jednoga od navedena četiri oblika u drugi te čitati, uspoređivati i tumačiti ovisnosti (veze)
  - prepoznati i protumačiti karakteristična svojstva jednostavnih grafova (monotonost, periodičnost) i njihove karakteristične točke (nultočke, ekstremi, točke važne za određenu situaciju), te uspoređivati jednostavne grafove
- za gimnazije dodatno
  - prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabiti njihova svojstva
  - primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnom životu.

Smatram da su ti sadržaji nedovoljni i da se prekasno uvode:

- Do sedmog razreda pojam funkcije gotovo da nije uopće prisutan
- U sedmom i osmom razredu je možda zadovoljavajuće prisutan ali bi se i tu mogla uraditi poboljšanja (npr. nema grafa obrnute proporcionalnosti i komponiranja geometrijskih preslikavanja i simetrija)
- U srednjoj školi se funkcije temeljitije usvajaju tek u 4. razredu, dakle, na kraju umjesto na početku jednog ciklusa obrazovanja u kojem je taj pojam itekako važan.
- U visokoškolskom obrazovanju taj pojam ostaje previše ograničen na neprekidne funkcije i u punoj širini se ponekad uvodi na višim godinama u okviru predmeta *Diskretna matematika*. Nedostaje na prvoj godini predmet tipa nekadašnjih *Uvoda u matematiku* koji bi studentu dao jednu matematičku širinu prije nego se posveti konkretnijim problemima

- **Prijedlozi za razmatranje.**

Pojam funkcije se kao i većina matematičkih pojmova postepeno razvijao i trebalo je stotine godina do precizne definicije. Danas kad imamo striktan pojam povijest se ponavlja u usvajanju tog pojma. Na raznim nivoima obrazovanja možemo uvesti razne aspekte tog pojma s raznim nivoima preciznosti. Ne smijemo čekati nivo obrazovanja kad možemo sve reći o njemu s potpunom preciznošću:

*Matematika nije kuća koja se gradi ciglu po ciglu nego organizam koji raste tako da je u svakom trenu sve već u nekom stupnju razvoja prisutno.*

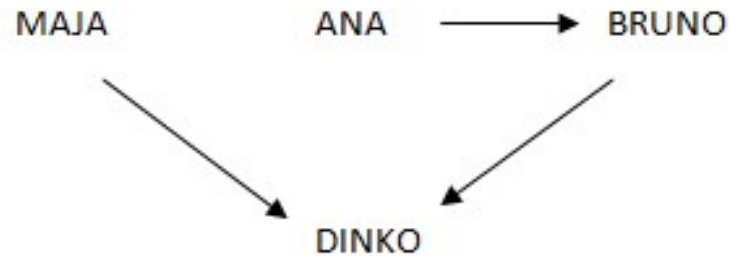
*Nije osnovno pitanje na kojem nivou obrazovanja uvesti dani matematički pojam nego što od svakog matematičkog pojma uvesti na danom nivou obrazovanja.*

W. Servais and T. Varga: Teaching School Mathematics : A UNESCO Source book, Penguin Books, 1971, UNESCO

- Ovdje su stavljeni na razmatranje neki prijedlozi (neki više a neki manje razrađeni) kako bi se mogla poboljšati nastava matematike uvođenjem pojma funkcije na raznim nivoima obrazovanja.

- **Od prvog do četvrtog razreda.** Po meni tu nedostaje razvijanje osjećaja za strukturiranje situacije. Nešto malo od onog što je nekad pretjerano glorificirana a sad pretjerano demonizirana moderna matematika htjela u prevelikim količinama uvesti. U svakodnevnom dječjem svijetu sve je puno skupova, odnosa i funkcija koji se mogu jednostavno grafički prikazati (i tako strukturirati i apstrahirati na ono bitno za razmatranje)

- **Primjer.** Dan je grafički prikaz neke obitelji gdje ćemo radi ilustracije izdvojiti funkciju  $tata(x)$  (svatko pokazuje svog tatu) (zanimljivije je ako istaknemo drugim bojama i druge relacije i funkcije)



Pitanja. Tko je tata od Bruna? Kome je tata Bruno? Tko je ovdje djeda? A tko brat?

Na isti način bismo mogli predstaviti funkcije s brojevima (npr. dodaj dva) ili s likovima (pomakni u danom smjeru)



- **Od petog do šestog razreda.** Tu bi se funkcije mogle već simbolički i računski gledati gledati
  - Mogla bi se u prethodnom primjeru uvesti oznaka  $T(x)$  za biti tata od  $X$  i postaviti pitanja: a) Izračunaj  $T(T(ANA))$  b) Riješi jednačbu  $T(X)=DINKO$  ..  
Naravno, bilo bi zanimljivije da imamo i  $M(X)$  za mamu
  - Valjalo bi koristiti oznake koje stavljaju naglasak na funkciju, npr. za zbrajanje:  $3,5 \mapsto 3 + 5$   
ili duljina dužine  $\overline{AB} \mapsto l(\overline{AB})$

- Transformacije s riječima. Npr sljedeće funkcije *rade* s riječima:

Funkcija O obrće riječ: npr.  $O(TOMO) = OMOT$

Funkcija MN slovo *M* mijenja u *N*: npr.  $MN(SEDAM) = SEDAN$

Funkcija A sve samoglasnike pretvara u A: npr.  $A(LULA) = LALA$

Izračunaj:

$MN(NE ZNAM)$

$A(O(AMOS))$

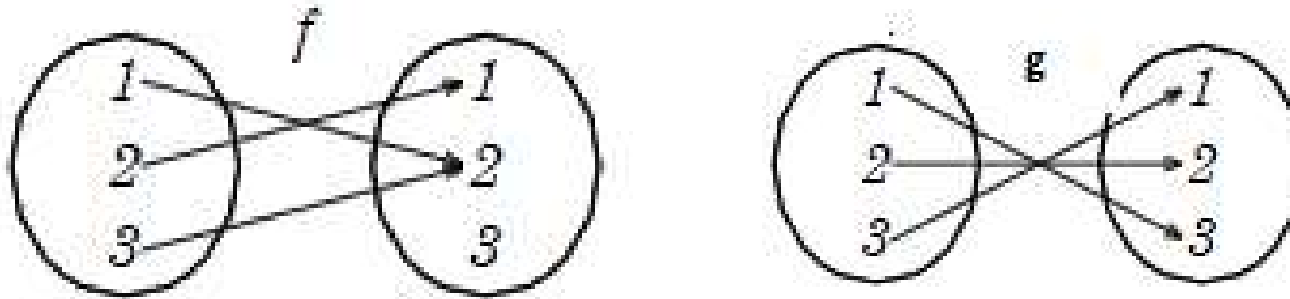
$O(MN(A(SEMINA)))$

Za svaku od navedenih funkcija nađi riječ koju ona ne mijenja, tj  $x$  takav da je  $f(x) = x$

Nađi suprotnu funkciju od funkcije MN. A od funkcije A?

- Kodiranja i šifriranja. Npr izmisli se transformacija alfabetu za šifriranje i inverzna za dešifriranje (primjer Cezarove šifre gdje se svaki znak ciklički preslika u znak koji je za zadani broj (ključ) mjesta udesno)

- Rad s *malim* funkcijama. Takve funkcije možemo zadati dijagramima. Npr.



Sad se možemo pitati jesu li funkcije totalne, injekcije, surjekcije, bijekcije, nalaziti inverze, komponirati ih (možda ne koristiti sve ove riječi)

- **Od sedmog do osmog razreda.** Sad imamo *velike* funkcije:
  - Ovdje dolazi do korelacije s predmetom Fizika gdje se javljaju razne direktne i obrnute proporcionalnosti, linearne i kvadratne funkcije. Taj je dio već dobro zastupljen, ali se pomoću odgovarajućeg softwarea (npr, Microsoft Mathematics) mogu crtati i složeniji grafovi
  - Komponiranje zrcaljenja u geometriji. Npr kompozicija dva zrcaljenja po paralelnim pravcima je translacija a po pravcima koji se sijeku translacija. Nalaziti inverze transformacija itd

- **Od prvog do četvrtog razreda.** Mislim da bi ovdje trebalo napraviti korjenitu reformu. Umjesto da se učenici iscrpljuju na sređivanju presloženih algebarskih izraza, dijeljenju polinoma, računanju koordinata točke koja dijeli dužinu u danom omjeru, posebnim formulama za tetivni četverokut, i nejednadžbama s apsolutnim vrijednostima koje se u matematici jedino sreću u udžbenicima iz matematike, bilo bi sigurno bolje napraviti prikladan modul o funkcijama.

- U tom bi modulu, uz primjereni nivo preciznosti i korištenjem grafova funkcija, učenik relativno jednostavno i efikasno usvojio osnovne pojmove o funkciji koje bi mogao primijeniti na
  - bolje razumijevanje i efikasnije rješavanje jednadžbi i nejednadžbi (kakve operacije smijemo raditi s objema stranama jednadžbe, zašto može doći do gubitka ili viška rješenja, zašto su važne inverzne funkcije za jednadžbe a monotone za nejednadžbe, kakva je veza rješenja jednadžbi i nultočka funkcija, rješavanja nejednadžbi i ispitivanja predznaka funkcija, itd.

- Na bolje razumijevanje i efikasnije usvajanje složenijih funkcija (asolutne vrijednosti, korijena, potencija, eksponencijalnih, logaritamskih, trigonometrijskih i arkus funkcija) u sljedećim godinama, te jednadžbi i nejednadžbi koje su vezane uz te funkcije
- Bolje razumijevanje sadržaja iz ostalih predmeta, pogotovo fizike, tokom cijele srednje škole

- U dodatku: *Pojam funkcije izložen na intuitivan način*, dan je jedan takav možda napredniji modul
- Pojam funkcije bi se mogao obraditi i u geometriji jer pravilno razumijevanje pojma sukladnosti, pojma sličnosti, pojma simetrije, čak i pojma Euklidske geometrije počiva na pojmu geometrijske transformacije. U dodatku: *Geometrija premještanja*, dan je prijedlog jednog takvog naprednijeg modula



- U analitičkoj geometriji u trećem razredu bi se trebalo više pažnje posvetiti simetrijama krivulja i jednadžbi
- U četvrtom razredu se već usvojeni pojmovi o funkciji, rast, pad, ekstremi, zakretanja i točke pregiba, mogu pomoću pojma derivacije s većom preciznošću nastaviti ispitivati na osnovi formule kojom je zadana funkcija za razliku od grafičkog ispitivanja koje je prije svega kvalitativno i ograničene preciznosti

- **Visokoškolsko obrazovanje.** Pošto se funkcije javljaju u svim mogućim kontekstima smatram da je u određenom momentu, i to što prije, već na prvoj godini, potrebno uvesti modul u kojem bi se pojam funkcije, kao i ostali temeljni pojmovi, precizno definirao i pokazao u punoj općenitosti. Prethodno pripremljen teren bi omogućio da se to uradi već na samom početku visokoškolske nastave. U dodatku *Pojam funkcije izložen na precizan način* dan je jedan takav prijedlog