

# Vjerojatnost i statistika u doba COVID - 19

Boris Čulina

Veleučilište Velika Gorica

e-mail: [boris.culina@vvg.hr](mailto:boris.culina@vvg.hr)

*Najteže je bilo raditi kada smo u RH svaki dan imali "bus umrlih", a u Split bi svaki tjedan "dolazio" jedan takav autobus. Bilo je previše nepotrebnog umiranja i takva vas situacija baca u depresiju i stalno sebi ponavljate jedno te isto pitanje:*

*„Je li moguće da ljudi ne razumiju i da radije umiru negoli se cijepe?“*

*A umirati od korone je grozno, mučno. Nije to smrt od infarkta gdje te "prikine" i gotovo, više te nema. Ovdje ljudi pate i umiru u strašnim mukama.*

izv. prof. dr. sc. **Ivo Ivić**, predstojnik  
Klinike za infektologiju KBC-a Split i šef  
COVID bolnice na Križinama.

# Zašto se to desilo?

Ovdje ćemo se baviti samo jednim uzrokom:

nerazumijevanjem znanosti

I samo jednim nerazumijevanjem u tom uzroku:

nerazumijevanjem pojma vjerojatnosti

# determinizam ↔ slučajnost

- **Determinizam:**  
Budući događaji su posve određeni prošlim događajima.  
PRIMJER: Padanje predmeta s neke visine je determinirano - u svakom trenutku znamo gdje se tijelo nalazi i koja mu je brzina.
- **Slučajnost:**  
Pod istim uvjetima, isti proces će se odviti na razne načine.  
PRIMJER: Bacanje igraće kocke.

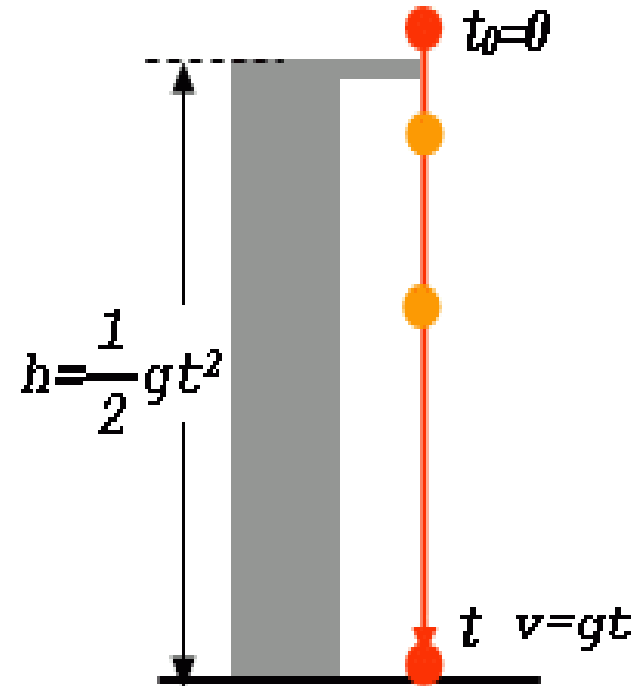
Obično se smatra da su determiniranost i slučajnost međusobno oprečni pojmovi. Je li zaista tako?

# Deterministički model padanja tijela (1)

Ako tijelo pustimo s neke visine, ono će nakon vremena padanja  $t$  prijeći put  $h$  i imati brzinu  $v$

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad v = gt$$

Gdje je  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ , konstanta slobodnog pada.



ALI,

# Deterministički model padanja tijela (2)

Prethodna formula vrijedi za zrakoprazni prostor, kad nema otpora zraka, a tek približno u stvarnom prostoru, za teža tijela i manje brzine.

Ako su brzine veće, tada više dolazi do izražaja otpor zraka. Sila otpora zraka je približno proporcionalna kvadratu brzine. Tada je za izračunavanje prijeđenog puta  $h$  i brzine  $v$  nakon vremena padanja  $t$  bolje koristiti formule na slici desno.

ALI,

Equation of motion

$$F = mg - kv^2$$
$$h = \frac{m}{k} \ln \left[ \cosh \left( \frac{t}{\sqrt{\frac{m}{gk}}} \right) \right]$$
$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \left( \frac{t}{\sqrt{\frac{m}{gk}}} \right)$$

# Deterministički model padanja tijela (n)

Koju formulu upotrijebiti  
kad je tijelo laganije,  
i kad je tijelo specifičnog oblika,  
i kad puše vjetar.  
i kad je zrak određene temperature i  
tlaka  
i kad ....

Ne možemo sve kontrolirati i zato je  
i ovdje prisutan slučaj: pod istim  
uvjetima (koje možemo kontrolirati)  
stvari će se svaki put drugačije  
odvijati.





# Zaključak

- U padanju tijela determinizam je dominantan ali slučaj je prisutan.
- Nastojimo izabrati što jednostavniji deterministički model koji za naše potrebe daje dovoljno točne vrijednosti.
- Matematika determinističkih modela je matematika funkcija (formula) koje determiniraju jedne veličine pomoću drugih.

# Bacimo kocku

Bacajući kocku pod istim uvjetima (protresemo je u ruci i bacimo s određene visine na određenu konfiguraciju terena) dobivat ćemo razne rezultate.

Ne možemo predvidjeti koji će broj pasti.

Međutim, po klasičnoj fizici, položaj kocke, njena brzina i brzina rotacije prilikom izbačaja posve određuju kako će ona pasti.

Ovdje je slučaj dominantan ali determinizam je prisutan.



# determinizam $\leftrightarrow$ slučajnost

- U realnosti su uvijek prisutni i determinizam i slučajnost.
- Determinizam i slučajnost nisu oprečni već nadopunjujući pojmovi.
- U nekim situacijama dominira determinizam i tada za njihov opis koristimo determinističke modele.
- Deterministički modeli su sastavljeni od formula koje determiniraju jedne veličine pomoću drugih.
- U nekim situacijama dominira slučaj.
- Po klasičnoj fizici, slučaj proizlazi iz nemogućnosti kontrole svih parametara. Po kvantnoj fizici, slučaj je dio prirode.
- Kako opisati slučaj? Kakva je matematika slučaja?

# Vjerojatnosni model nepravilne „kocke”

- Bacanje kocke je primjer slučajne pojave.
- *Slučajna pojava je određena zadanim uvjetima pod kojima se odvija.*
- Nije svejedno bacamo li kocku tako da je protresemo u ruci ili tako da naštimavamo bacanje da dobijemo šesticu.



# Vjerojatnosni model nepravilne „kocke”

- *Slučajnoj pojavi pridružujemo **prostor ishoda**.*
- Za prostor ishoda je važno da će se u odvijanju slučajne pojave desiti točno jedan ishod.
- Za kocku možemo za prostor ishoda uzeti skup  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ .
- Možemo uzeti i skup  $\Omega = \{par, nepar\}$ , ovisi što nas zanima.



# Vjerojatnosni model nepravilne „kocke”

- Hoće li pasti broj djeljiv s 3?
- Kada će se desiti taj događaj? Za ishode 3 i 6 će se desiti, za ostale neće.
- Ma kako događaj opisali, na kraju nas samo zanima koji ga ishodi realiziraju a koji ne. Tako, ***događaje modeliramo kao skupove ishoda.***
- Događaj „pao je broj djeljiv s tri” je skup  $D = \{3,6\}$ .



# Vjerojatnosni model nepravilne „kocke”

- Kako išta predvidjeti o događaju  $D = \{3,6\}$  kad ne možemo predvidjeti što će se desiti u jednom bacanju?
- Gledat ćemo koliko puta  $n_D$  će se desiti događaj  $D$  u nizu od  $n$  bacanja kocke.
- Tu se pojavljuje pravilnost!:  
*kad za svaki niz bacanja izračunamo relativnu frekvenciju  $\frac{n_D}{n}$ , one su približno iste. Što je veći broj bacanja, grupiranje relativnih frekvencija je izraženije.*



# Vjerojatnosni model nepravilne „kocke”

- Broj oko kojeg se grupiraju relativne frekvencije nazivamo **vjerojatnost događaja  $D$**  i označavamo  $P(D)$ . Taj broj nije jednoznačno određen tim grupiranjem već ga postuliramo.
- Smisao tog broja je da on aproksimira (predviđa) relativnu frekvenciju događaja  $D$  u nizu ponavljanja:

$$P(D) \cong \frac{n_D}{n}$$





# Vjerojatnosni model nepravilne „kocke”

- Iz tog smisla proizlazi da **funkcija vjerojatnosti**  $P$  koja svakom događaju pridružuje njegovu vjerojatnost ne može biti proizvoljna funkcija već mora ispunjavati određena svojstva, tzv. **aksiome vjerojatnosti** . Npr.
  - $0 \leq P(D) \leq 1$
  - $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
  - $A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$
  - Za  $A$  i  $B$  međusobno isključive događaje  $P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B)$



# Vjerojatnosni matematički model

- Vjerojatnosni model se sastoji od:
  - nekog nepraznog skupa  $\Omega$  koji nazivamo **prostor ishoda**, njegove elemente **ishodima**, a podskupove **dogadajima**
  - i jedne funkcije, koju nazivamo **vjerojatnost**, a koja svakom događaju pridružuje jedan broj, pri čemu moraju biti ispunjeni tzv. **aksiomi vjerojatnosti**

# Matematika i realnost

- Matematika nam ne govori kakva je realnost: ona nam nudi razne modele za opis realnosti. Tek neka teorija o realnosti ili eksperiment određuju koji model odgovara realnosti.
- Matematika nam nudi razne determinističke modele (formule) za ispitivanje ovisnosti prijedženog puta o vremenu kod slobodnog pada u vakuumu:

$$h = kt, h = kt^2, h = kt^3, h = k/t^2, h = k \ln(at), \dots$$

- Fizika je odabrala koji model odgovara realnosti:  $h = \frac{1}{2}gt^2$ .

# Matematika i realnost

- Matematika nam nudi razne vjerojatnosne modele za opis dane slučajne pojave. Za danu slučajnu pojavu mi moramo odabrati model koji odgovara toj pojavi.
- Osnovni je kriterij ispravnog odabira modela da vjerojatnost  $P(D)$  događaja  $D$  mora odgovarati relativnoj frekvenciji  $\frac{n_D}{n}$  događaja u nizu ponavljanja.

$$P(D) \cong \frac{n_D}{n}$$

# Statistička interpretacija vjerojatnosti

$$P(D) \cong \frac{n_D}{n}$$

- Ako znamo iz neke teorije ili eksperimenta vjerojatnost nekog događaja tada možemo procijeniti relativnu frekvenciju njegovog pojavljivanja u nizu ponavljanja slučajne pojave.
- Npr. za simetričnu kocku je prihvatljivo uzeti da su vjerojatnosti pojedinih ishoda jednake, pa je vjerojatnost da padne šestica jednaka  $1/6$ . Tako možemo procijeniti da će u nizu od 100 bacanja pasti oko 17 šestica.

# Statistička interpretacija vjerojatnosti

$$P(D) \cong \frac{n_D}{n}$$

- Ako eksperimentiranjem utvrdimo relativne frekvencije događaja tada možemo procijeniti njihove vjerojatnosti.
- Npr. za nepravilnu igraću „kocku” možemo tako procijeniti vjerojatnosti i onda ih koristiti za daljnja predviđanja u slučajnim pojavama u kojima „sudjeluje” ova „kocka”.

# Značenje vjerojatnosti

- Za daljnje razmatranje ključno je imati na umu sljedeće:
  - *Vjerojatnost nam ne može reći što će se desiti u pojedinoj realizaciji slučajnog procesa već samo može procijeniti relativne frekvencije događanja u cijelom mnoštvu realizacija slučajnog procesa.*
  - *Vjerojatnost nekog događaja ne ovisi samo o tom događaju nego i o slučajnoj pojavi u odnosu na koju promatramo taj događaj. Npr. vjerojatnost pada šestice nije ista ako je bacamo na standardan način ili ako naštimavamo da padne šestica.*

# Klađenje sa igraćom kockom



- Netko vam predloži sljedeću okladu:
  - Bacit će se simetrična igraća kocka jednom. Ako padne šestica izazivač će dobiti 1000 eura. U protivnom vi ćete dobiti tisuću eura.
- Vjerojatnost da će pasti šestica je  $1/6$ , a da neće  $5/6$ , pet puta veća. Da li biste prihvatili okladu? Šta biste uradili da je ulog 10 000 eura?



# Klađenje sa igraćom kockom



- Razumijevanje pojma vjerojatnosti nam može pomoći u donošenju odluke.
- Vjerojatnosti nam daju vrlo dobru procjenu što će se desiti u npr. 100 bacanja kocke. Šestica će pasti oko  $1/6$  puta, dakle oko 17 puta, nekoliko puta više ili manje. Ali možete biti sigurni da neće pasti više od 30 puta (vjerojatnost da se to desi je oko  $3/10\ 000$ ).

# Klađenje sa igraćom kockom



- Tako će izazivač dobiti u najviše 30 bacanja a vi u najmanje 70 bacanja. Zaradit ćete najmanje 40 000 eura (očekivana zarada je približno 67 000 eura).
- Ja bih sigurno prihvatio okladu za 100 bacanja kocke.

# Klađenje sa igraćom kockom



- Ali izazivač nudi okladu za samo jedno bacanje kocke!
- Vjerojatnosti nam daju vrlo dobru procjenu što će se desiti u većem mnoštvu bacanja ali nam ne mogu reći što će se desiti u jednom bacanju! *Tada nam samo mogu reći koji je izbor razumniji.*

# Klađenje sa igraćom kockom



- S obzirom da je 5 puta veća vjerojatnost da neće pasti šestica nego da će pasti, mogli bismo reći da je 5 puta razumnije kladiti se da neće pasti šestica nego da hoće.
- Međutim, ako prihvatite okladu, bez obzira što je vaša odluka 5 puta razumnija od izazivačeve, šestica će pasti ili neće pasti, i vi ćete dobiti ili izgubiti 1000 eura.

# Klađenje sa igraćom kockom



- Za okladu u 10 eura prihvatilo bih tu neizvjesnost.
- Za okladu u 1000 eura morao bih se posavjetovati sa suprugom.
- Na okladu u 10 000 eura sigurno ne bih pristao.

# Klađenje sa Smrću



- Ova igra je mnogo dramatičnija:
  - okladu ne možete izbjeći
  - izazivač je Smrt
  - ulog je veoma visok: vaš život

# Klađenje sa Smrću



- Međutim unutar igre, Smrt vam daje izbor. Možete izabrati između dvije kutije:
  - Prva kutija sadrži brojeve od 1 do 1000. Ako odaberete tu kutiju, Smrt će nasumice uzeti jedan broj iz nje. Ako izabere 1, uzet će vam život, inače će vas poštediti.
  - Prva kutija sadrži brojeve od 1 do 1 000 000. Ako odaberete tu kutiju, Smrt će nasumice uzeti jedan broj iz nje. Ako izabere 1, uzet će vam život, inače će vas poštediti.

# Klađenje sa Smrću



- Koju kutiju izabrati?
- Ako netko izabere prvu kutiju, vjerojatnost da će umrijeti je  $1/1000$ .
- Ako netko izabere drugu kutiju, vjerojatnost da će umrijeti je  $1/1\ 000\ 000$ .



# Klađenje sa Smrću



- Kao i u igri kocke, u većoj populaciji, kao npr. u populaciji od 4 miliona ljudi, kolika je ugrubo Hrvatska:
  - ako svi izaberu prvu kutiju, umrijet će ih oko 4000
  - Ako svi izaberu drugu kutiju umrijet će ih oko 4
- Dakle, na nivou cijelog društva ispravno je preporučiti ili čak narediti da se izabere druga kutija.

# Klađenje sa Smrću



- Ali šta je s pojedincem?
- Izbor koji je dobar za cijelo društvo, ne mora biti dobar i za pojedinca.
- Je li druga kutija ispravan izbor i za pojedinca?

# Klađenje sa Smrću



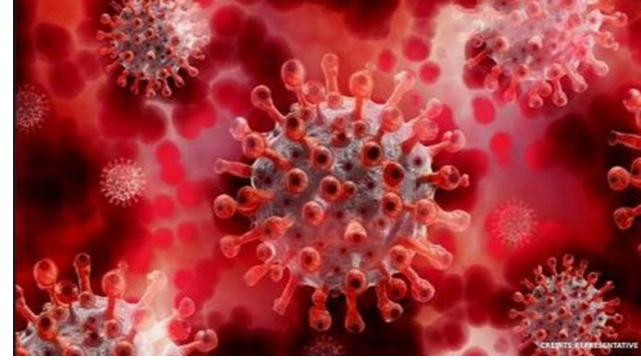
- Kao i kod oklade na kocki, u pojedinačnoj situaciji vjerojatnosti nas ne mogu sačuvati od neizvjesnosti.
- Vjerojatnosti ne mogu predvidjeti što će se desiti s pojedincem, hoće li umrijeti ili ne, bez obzira koju kutiju odabrao.
- Ali vjerojatnosti nam govore koji izbor je razumniji, čak i koliko puta je razumniji.

# Klađenje sa Smrću



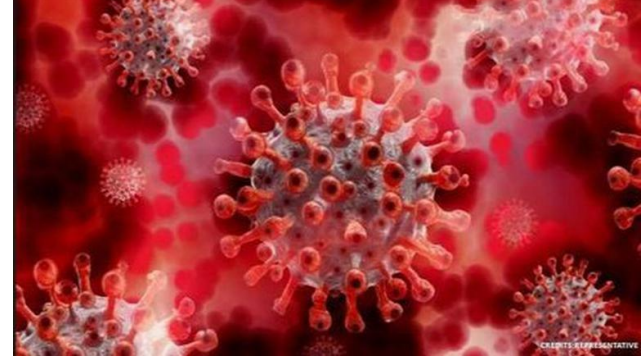
- Vjerojatnost da ćete umrijeti ako odaberete drugu kutiju je tisuću puta manja nego ako odaberete prvu kutiju.
- Zato, usprkos neizbježnoj neizvjesnosti, tisuću puta je razumnije odabrati drugu kutiju.
- To je razlog zašto bih ja odabrao drugu kutiju.

# Klađenje sa Covid-19



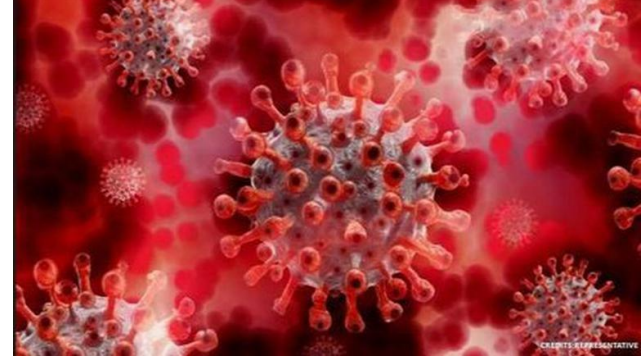
- Život i smrt u doba Covid-19 pandemije su mnogo kompleksniji od prethodne igre sa Smrću, ali ta je igra osnovni jednostavni model koji ugrubo predviđa što će se desiti društvu i pojedincu:
  - Izabravši necijepljenje, osoba je izabrala prvu kutiju i vjerojatnost da će umrijeti od Covida je reda tisućnine.
  - Izabravši cijepljenje, osoba je izabrala drugu kutiju i vjerojatnost da će umrijeti od cjepiva je reda milijuntnine.

# Klađenje sa Covid-19



- Složeniji modeli pridružuju osobama vjerojatnosti koje više odgovaraju njihovim posebnostima:
  - dob
  - posebni zdravstveni problemi
  - pridržavanje epidemioloških mjera
  - procijepljenost društva i pridržavanje epidemioloških mjera društva u kojem živi
  - ...

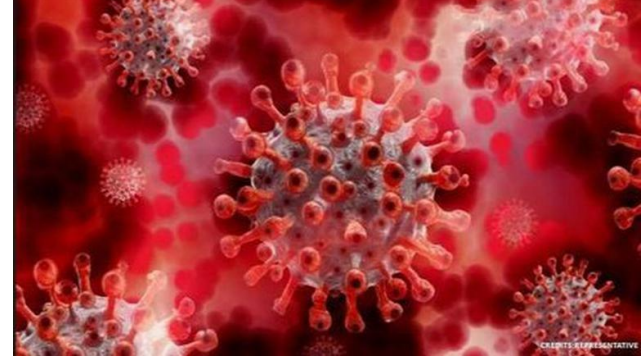
# Klađenje sa Covid-19



- Ne zaboravimo da vjerojatnost događaja ovisi i o slučajnoj pojavi u okviru koje promatramo događaj.
- Vjerojatnost da će netko u Hrvatskoj u sljedećih godinu dana poginuti u prometnoj nesreći je reda desetstisućnine.
- Ako pak voli brzu vožnju, za njega je ta vjerojatnost veća. Ona sad procjenjuje postotak ljudi iz te populacije koji će stradati.
- Ova vjerojatnost bolje opisuje šanse brzog vozača da strada nego vjerojatnost u odnosu na cijelu populaciju.



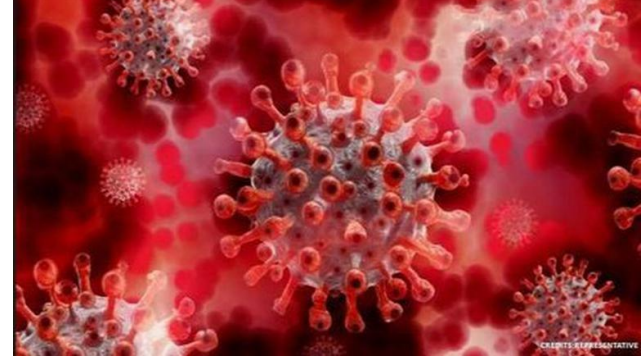
# Klađenje sa Covid-19



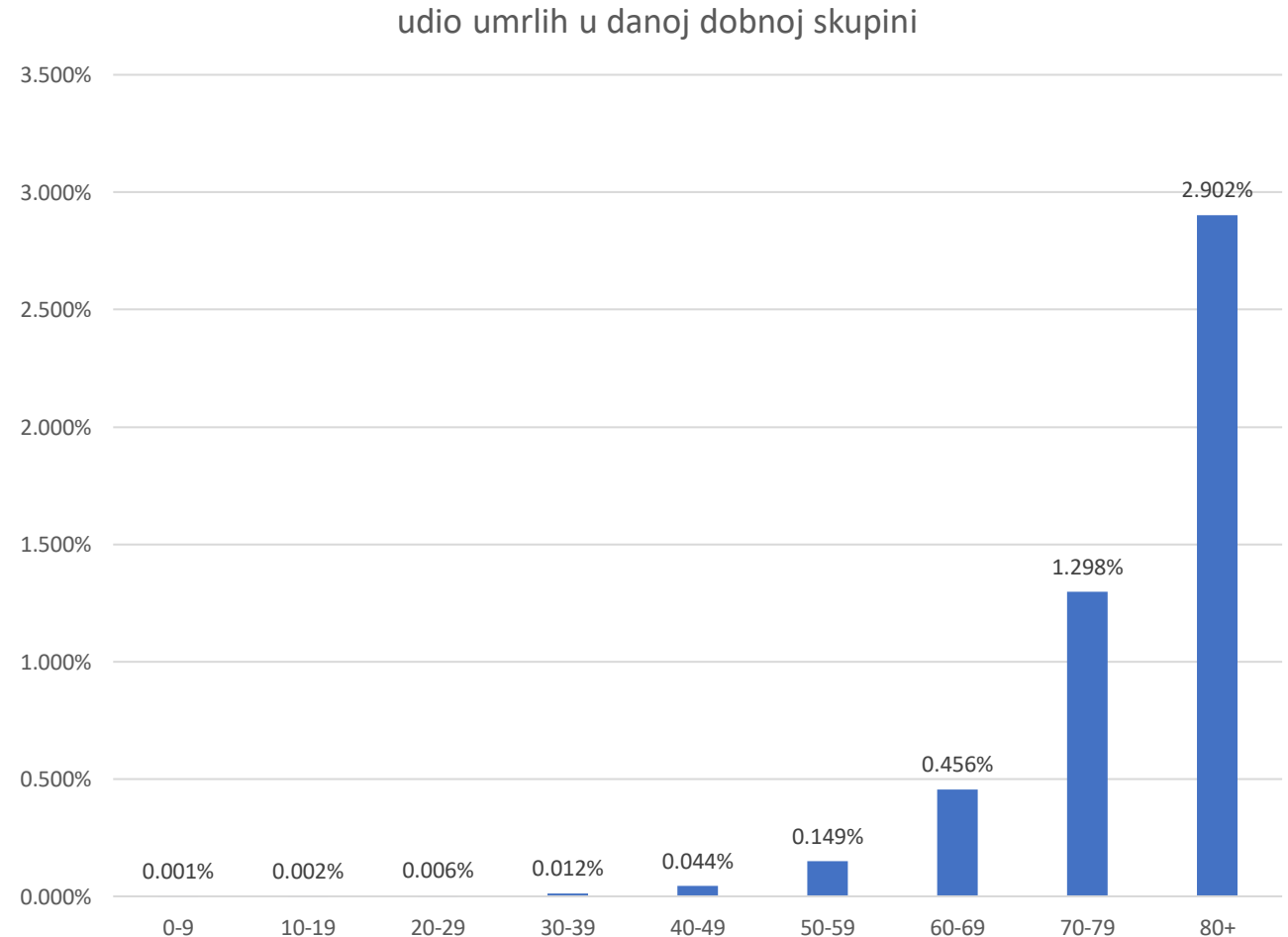
- Vjerojatnost smrti od Covida ili cijepljenja protiv Covida neke osobe određena je populacijom koju promatramo.
- Ako populaciju kojoj pripada ta osoba suzujemo postavljajući dodatne uvjete (dob, specifični zdravstveni problemi, ...) tad se ta vjerojatnost mijenja i sve više odgovara toj osobi.



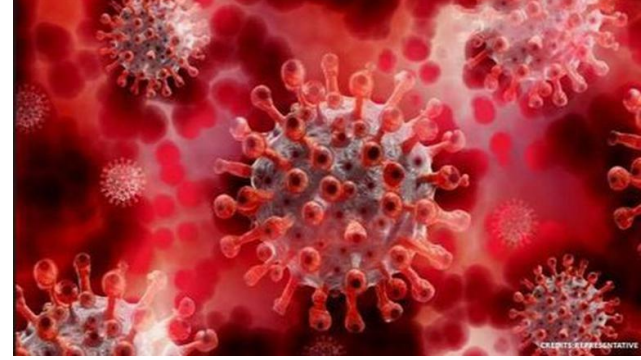
# Klađenje sa Covid-19



- Sljedeći grafikon pokazuje koliko je posto ljudi u svakoj dobnoj skupini u Hrvatskoj umrlo od Covid-19. Po statističkoj interpretaciji, ti postotci procjenjuju vjerojatnosti.

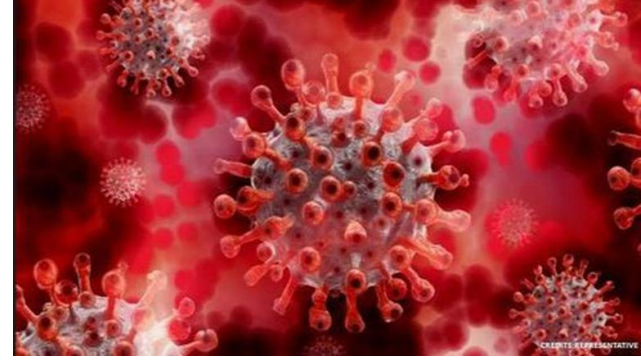


# Klađenje sa Covid-19



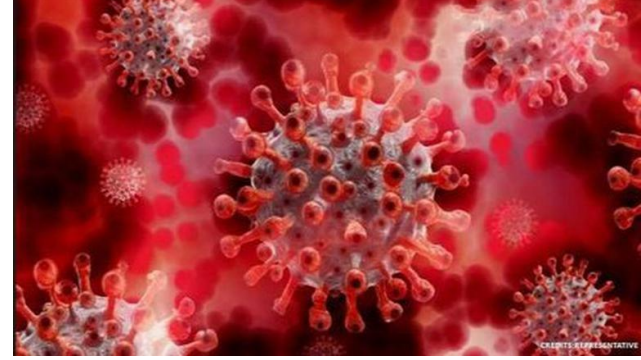
- Idealno, grupa bi trebala biti toliko specifična da je npr. vjerojatnost smrti od cijepljenja za osobu iz te grupe jednaka 1 (svatko iz te grupe će umrijeti ako se cijepi) ili 0 (svatko iz te grupe neće umrijeti ako se cijepi).
- Kad bi znanost za svaku osobu mogla naći tako usku grupu tad bismo točno znali tko smije a tko ne smije primiti cjepivo.
- Međutim, previše je parametara uključeno i procesi su previše kompleksni da bismo imali potpuno razumijevanje i kontrolu nad ishodima.

# Klađenje sa Covid-19



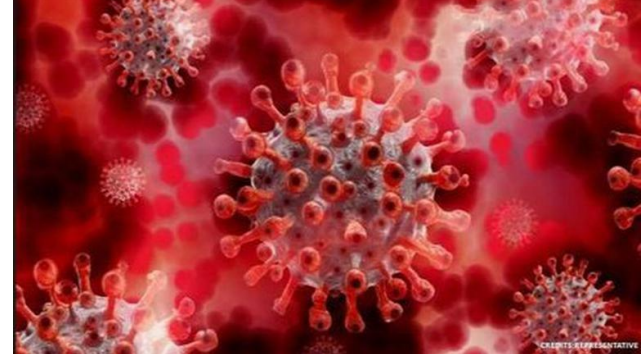
- Može se reći da su vjerojatnosni modeli koje trenutno imamo ujedno i mjere našeg znanja: specifičniji modeli – veće znanje.
- U vremenu koje je bilo na raspolaganju, znanost je uspjela:
  - odrediti vjerojatnosti smrti za ne naročito specifične grupe (jednostavni model igre sa Smrću je najgrublji takav model)
  - dati opće upute o ponašanju
  - identificirati specifične grupe koje bi mogle biti izrazito ranjive na cijepljenje ili na COVID-19 bolest.

# Klađenje sa Covid-19



- Znanost nije svemoćna, ali u situacijama poput COVID-19 pandemije ona je najbolje oruđe koje imamo.
- Trebamo se držati znanosti kad donosimo odluke, bez obzira da li nam ona daje posve određena predviđanja ili samo vjerojatnosti.
- A znanost kaže da cijepići se, ako nismo u nekoj izuzetno ranjivoj grupi za cijepljenje, i držeći se odgovarajućih epidemioloških mjera štitimo sebe i one koje volimo kao i društvo u cjelini.

# Klađenje sa Covid-19



- Pogrešno je misliti da se, ako se idemo cijepiti protiv COVID-19, nepotrebno izlažemo riziku.
- Rizik je već tu, a cijepljenje ga bitno reducira.
- Ne možemo izbjeći rizik, ali možemo djelovati razumno.
- Vjerojatnosti nam pomažu da napravimo razumni izbor. A, ugrubo, tisuću puta je razumnije cijepiti se nego ne cijepiti se.

# znanost ↔ zamantanost

- Istina je da postoji korupcija u znanstvenoj zajednici i da oni koji financiraju znanost znaju vršiti pritisak na nju.
- Ali daleko je veća korupcija u drugim zajednicama, pogotovo u onima koje nas pokušavaju bez ikakve evidencije i argumenta uvjeriti da se ne smijemo cijepiti.
- Za razliku od takvih zajednica, gdje korupcija, pored manipulacije, ima plodno tlo, priroda znanstvene zajednice je takva da ona vrlo brzo otkriva i odbacuje korupciju i laž.

## znanost $\leftrightarrow$ zamantanost

- Znanje je plemenita osobina ljudske vrste:  
obezvrjeđujući znanje obezvrjeđujemo sebe.
- Znanje je naše najjače oruđe u razumijevanju i kontroli svijeta:  
odbacujući znanje odbacujemo naše najmoćnije oruđe.