

MATEMATIKA ZA PREDŠKOLCE

Kratke upute za roditelje i odgajatelje s primjerima matematičkih aktivnosti¹

Verzija 4²

Boris Čulina

1 Predgovor

U dijelu UPUTE dane su upute šta i kako, dijelom i zašto tako, pomagati predškolskoj djeci u njihovom matematičkom razvoju. U dijelu AKTIVNOSTI dani su primjeri aktivnosti kroz koje dijete razvija svoje matematičke sposobnosti. Tko ne želi čitati upute već samo koristiti izložene aktivnosti, može ih koristiti bilo kojim redoslijedom. Od ključne je važnosti jedino da ima na umu sljedeće:

Matematičke aktivnosti djeteta moraju biti dio dječjeg svijeta - moraju imati svoju motivaciju, smisao i vrijednost u svijetu djeteta, a ne izvana, u svijetu odraslih. Dijete najbolje razvija svoje matematičke aktivnosti kroz igru. U razvijanju matematičkih sposobnosti dijete mora imati slobodu a ne pritisak da mora nešto naučiti.

Na nama je da pomažemo djetetu i da ga vodimo u njegovom matematičkom razvoju tako da mu osiguravamo odgovarajuće okruženje za to: prostor (bilo u kući, bilo u dječjem parku ili prirodi) vrijeme, materijal za igru (slagalice, papir, glinu, pjesak, ...), osmišljene elemente (igre, igračke, knjige, ...), i motivirajući kontekst (priče, uređenje svojih polica, sudjelovanje u obiteljskim poslovima,), i da, poštujući njegovu individualnost i tempo, nudimo razne aktivnosti i nemametljivo podržavamo one koje ga u danom trenu privlače.

Gledano u krajnostima, dijete će se puno bolje matematički razvijati ako ga pustimo da se na miru igra, nego ako vršimo pritisak na njega. Kad sudjelujemo u njegovim aktivnostima, imajmo na umu, kako je moja supruga rekla, da dijete najbolje uči kad ne zna da uči.

¹ Materijal se može slobodno koristiti, osim u komercijalne svrhe. Primjeri su uglavnom dio „folklor“a. Negdje su mi poznati autori, neke sam izmijenio a neke izmislio. U dodacima su skice za dvije priče gdje sam oznakom © Boris naveo svoje autorstvo. Ponegdje ču dati uputu na komercijalni materijal. Što bi se reklo, nemam tu nikakav sukob interesa. Svi komentari i prijedlozi su dobrodošli – pošaljite ih, molim vas, na mail boris.culina@vvg.hr.

² Trenutno sam u potrazi za izdavačem s kojim bih ovaj draft pretvorio u lijepo dizajnirani priručnik, i u nekoliko slikovnica - priča za djecu s matematičkim sadržajem (u dodacima su skice za dvije takve priče). Uvjet sklapanja ugovora je da priručnik mora biti barem u elektronskom obliku svima slobodno dostupan.

Sadržaj

1	Predgovor	1
1	UPUTE	3
1	UVODNI DIO	3
1	O razlozima nastanka ovog materijala	3
2	Zašto je matematika za predškolce važna?	5
3	Kako podučavati matematiku najmlađe.....	5
4	Koju matematiku podučavati najmlađe	6
2	NEPOSREDNI MATEMATIČKI ELEMENTI	9
1	Skupovi, relacije i funkcije	9
2	Strukture.....	11
3	Prirodni brojevi.....	12
4	Geometrija.....	14
5	Ostalo	15
3	POZADINSKI MATEMATIČKI ELEMENTI	16
1	Jezik	16
2	Logika.....	18
3	Proceduralno razmišljanje.....	18
4	Rješavanje problema	19
2	AKTIVNOSTI	20
1	Skupovi	20
2	Relacije	28
3	Funkcije.....	37
4	Strukture.....	48
5	Brojevi.....	54
6	Geometrija.....	60
7	Jezik	113
8	Logika.....	113
9	Proceduralno razmišljanje.....	116
10	Rješavanje problema	118
3	DODACI	120
1	DJECA, PČELE I PATULJCI	120
2	VUK I 10 KOZLIĆA	135

1 UPUTE

1 UVODNI DIO

1 O razlozima nastanka ovog materijala

Ovaj materijal je namijenjen roditeljima, odgajateljima i svima koji žele pomoći djeci u njihovom matematičkom razvoju. Materijal se bavi prvenstveno matematičkim razvojem predškolaca ali se mnogo toga može primijeniti i na stariju djecu. Materijal nije standardan – u opreci je sa službenim obrazovnom matematičkim standardima za taj uzrast. Zato smatram potrebnim napisati kako je nastao, da čitatelj jasno zna u šta se upušta kad primjenjuje ovaj materijal.

Po profesiji sam matematičar.³ Sve je započelo kad sam osjetio da je došlo vrijeme da mojoj tada tri i po godišnjoj unučici Nini pomognem u matematičkom razvoju. Odmah sam se sjetio knjige W. Servais, T. Varga, (Eds.) *Teaching School Mathematics*: Penguin Books – Unesco (1971),⁴ koja je ostavila dubok utisak na moje podučavanje matematike, pogotovo Vargin uvodni članak. Njegove riječi “Svako dijete, po svojoj prirodi, voli učiti isto kao što voli jesti.” duboko su se urezale u mene.

Previše studenata s kojima sam radio nisu imala tu glad za učenjem matematike. Kod većine njih tu glad je zamijenila averzija prema matematici. Lako se uvjeriti da je to masovna pojava u cijelom svijetu. Uvijek sam to smatrao neprihvatljivim i nepotrebnim stanjem. Međutim, kad sam zašao u svijet matematičke poduke najmlađih i shvatio da je tu ista situacija, štoviše, da ona tu i nastaje, doslovno sam to doživio kao nasilje nad djecom. Ne samo da je to nasilje institucionalizirano u teoriji i u praksi matematičkog obrazovanja, već je dobro usađeno u glave većine ljudi, ne samo kod nas, već i u cijelom svijetu.

Pogotovo me zasmeta kad čujem, a često to čujem, da neko dijete nije za matematiku. Pored toga što inače trebamo biti jako oprezni u donošenju takvih sudova (pogotovo ih ne smijemo izricati pred djecom), kako uopće možemo tako nešto reći, i nepotrebno diskvalificirati dijete, čak i njega samog uvjeriti da nije za matematiku, ako sami ne razumijemo šta je matematika? A odgovorno tvrdim da ne samo da većina ljudi ne razumije šta je matematika već i uspostavljeni standardi matematičkog obrazovanja najmlađih, i kod nas i u svijetu, ne razumiju što je matematika.

Uvriježeno i intuitučno stajalište je da je matematika nauka o brojevima i Euklidovoj geometriji. Takvo stajalište je prevaziđeno već pri kraju 19. stoljeća, kada je matematika doživjela pravu revoluciju i prešla u ono što danas nazivamo moderna matematika. Razne grupe matematičara su pokušale nakon drugog svjetskog rada uvesti modernu matematiku u sustav obrazovanja – to je tzv. pokret nove matematike – ali su to uradili jednostrano, ne razumijevajući razvojnu psihologiju djece, a što se najnegativnije

³ O meni i onome što radim možete saznati više na stranici <https://understandingmath.academy/about-2/> ili na Twitteru: [@doing_math](https://twitter.com/doing_math). Za ovu priliku možda vrijedi navesti da sam glavni autor desetak udžbenika iz visokoškolske matematike i koautor udžbenika iz matematike od 4. do 8. razreda osnovne škole u izdanju Alfe.

⁴ Knjiga se može naći na sljedećem linku: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000007959>.

odrazilo upravo na obrazovanju najmlađih. Ne samo da su doživjeli neuspjeh već su stvorili negativan stav prema uvođenju sadržaja moderne matematike u obrazovanje. Matematičko obrazovanje su opet preuzeli edukatori za koje moram ipak reći da, općenito govoreći, ne razumiju modernu matematiku, kao što ni tvorci „nove matematike“ nisu razumjeli edukatore.

Mada su u sadašnjim standardima prisutni elementi moderne matematike, oni su marginalizirani - njima ponovo dominiraju brojevi i geometrijske figure. Svi ostali jako važni i moderni matematički sadržaji su njima podređeni. Tako, držeći se današnjih obrazovnih standarda, drastično ograničavamo dječji svijet, kočimo dijete u ispravnom matematičkom razvoju i možemo ga udaljiti od matematike.

A sve je to nepotrebno. Ne samo da je danas stvarna i uspješna matematika upravo moderna matematika (koja naravno uključuje i brojeve i geometriju), pa je baš nju vrijedno usvojiti, nego je moderna matematika upravo matematika koja je prirodna dječjem svijetu. Ta je matematika izložena u ovim materijalima, ali sa sasvim drugačijim pristupom od pristupa u pokretu nove matematike.

Duboko sam uvjeren da su promjene u matematičkom obrazovanju najmlađih nužne i nadam se da je upravo sada došlo vrijeme za njih. Dovoljno široko razumijevanje matematike je ovdje jako važno. Ne trebamo se brinuti da ćemo matematiku možda sagledati preširoko. To nikoga neće ograničiti u matematičkom razvoju. Samo ne smijemo dozvoliti da je sagledavamo preusko, a što upravo danas dominira. Glavna svrha ovog materijala je da ponudi dovoljno široke i slobodne aktivnosti koje omogućuju djeci ispravan matematički razvoj.

S obzirom da mi je želja da ovaj materijal bude od pomoći što širem krugu ljudi, nastojat će biti što konkretniji: davati upute što treba raditi bez prevelikog objašnjavanja zašto su te upute ispravne. Dio objašnjenja će staviti u fusnote, za one koji su u potrazi za detaljnijim objašnjenjem spremni suočiti se sa stručnjicom terminologijom. Često će se tu pozivati na dijelove članka *Early Years Mathematics: the missing link*⁵ (skraćeno EYM ubuduće) gdje sam ovaj pristup detaljnije obrazložio. Drugim riječima, ovaj materijal je naprosto taj članak preoblikovan u upotrebljivu formu i nadopunjena konkretnim primjerima.

Da bismo djeci pomagali u matematičkom razvoju dobro je da i sami imamo određeno matematičko znanje. U ovom materijalu su dana kratka i intuitivna objašnjenja. Za one koji se žele detaljnije upoznati s određenom matematikom upućivat će ih na materijal *Osnove matematike*⁶ (OM ubuduće).

⁵ Članak se može naći na linku: <https://philpapers.org/archive/ULIEYM.pdf>. Prihvaćen je za objavu u sljedećem broju (jesen 2023) časopisa *Philosophy of Mathematics Education Journal*. U pozadini članka se nalazi razumijevanje matematike koje je opisano u mom članku *Mathematics – an imagined tool for rational cognition*. Članak se može naći na linku <https://philpapers.org/archive/CULMA.pdf>. Prvih sedam sekcija je prihvaćeno za objavu u časopisu *Annals of Mathematics and Philosophy*.

⁶ To je poglavje 4 iz knjige B. Čulina, N. Majstorović: *Uvod u matematičku logiku i osnove matematike*, i nalazi se na linku: <https://understandingmath.academy/OMahhd>. Namjera mi je napraviti materijal koji će biti prilagođeniji roditeljima i odgajateljima „koji žele znati više“, nego što je ovaj materijal, ali za sada „bolje išta nego ništa“.

2 Zašto je matematika za predškolce važna?

Predškolsko razdoblje je najvažnije razdoblje u razvoju čovjeka, kako u emotivnom tako i u intelektualnom smislu. Tu se stvaraju glavni temelji ličnosti. To su već jasno znali tvorci modernog obrazovanja najmlađih, počevši od Friedricha FröBELA, tvorca dječjih vrtića u prvoj polovici 19. stoljeća, i Marie Montessori, da spomenem samo one čije rade najbolje pozajem i koji su mi srcu najbliži.⁷ Moderna znanstvena istraživanja to potvrđuju, uključujući i gotovo odlučujuću važnost tog perioda za matematički razvoj djeteta.

Napominjem da toliku važnost ne zahtjeva od nas veliku brigu i stres hoće li se dijete matematički ispravno razvijati u tom periodu, već samo da mu omogućimo dovoljno prostora, vremena i materijala za slobodnu igru, i osluškujemo što mu treba. Razvoj djeteta ne dolazi od nas, već iz njega samoga. Mi samo to trebamo podržavati.

Najnovija istraživanja su pokazala da su djeca predškolske dobi matematički mnogo sposobnija nego što se prije mislilo. Mene ti rezultati uopće nisu iznenadili. U razvojnoj psihologiji je odavno poznato da je predškolsko doba razdoblje izuzetne kreativnosti i imaginacije, ako se djetetu osiguraju odgovarajući uvjeti, a u mom gledanju na matematiku, kreativnost i imaginacija su ključni elementi matematičkih aktivnosti, iako se u javnom mnenju ove sposobnosti obično vežu uz umjetnost.

3 Kako podučavati matematiku najmlađe

Metodologija je uglavnom ustanovljena (kroz rade FröBELA, Montessori i mnogih drugih) i daje sasvim zadovoljavajuće odgovore na pitanje kako djecu podučavati bilo što, pa tako i matematiku.

Matematičke aktivnosti djeteta moraju biti dio dječjeg svijeta - dio njegovih svakodnevnih aktivnosti, dio njegove igre, ukomponirane u dječje priče koje rado sluša. Matematičke aktivnosti moraju imati svoju motivaciju, smisao i vrijednost u svijetu djeteta, a ne izvana, u svijetu odraslih. U razvijanju matematičkih sposobnosti djeca moraju imati slobodu a ne pritisak da moraju ostvariti određene ishode učenja.

Kao što je tvorac teorije skupova i jedan od tvoraca moderne matematike Georg Cantor (1845 – 1918) rekao da je bit matematike u njenoj slobodi, tako je i bit matematičkog obrazovanja djeteta u njegovoj slobodi. Na nama je da djeci pomažemo i da ih vodimo u razvijanju matematičkih sposobnosti, poštujući njihov svijet i njihovu individualnost – koje aktivnosti i u kojem trenu razvoja ih privlače – kao i da im osiguravamo odgovarajuće društveno okruženje za to.

⁷ Proučavajući njihova djela, bio sam osobno fasciniran bogatstvom obrazovnog znanja koje su ostavili iza sebe i istovremeno frustriran ignoriranjem tog znanja u današnjoj široj obrazovnoj praksi. Na websiteu <https://archive.org/> možete pronaći njihova djela (utipkajte njihova imena u tražilicu).

Od ključne je važnosti da se držite ove jednostavne metodologije koja samo zahtjeva ljubav i osjećaj za dijete. Rad u skladu s njom daje iznimne rezultate. Njeno kršenje može imati negativne posljedice za matematički razvoj djeteta.

Ovoga moraju pogotovo biti svjesni odgajatelji i učitelji kad su izloženi zahtjevima nadležnih tijela koja su često u sukobu s ovom metodikom. Ali i roditelji, kad su pod pritiskom da njihovo dijete treba postići tražene rezultate. Razvijanje takve svijesti je pogotovo važno jer su postojeći školski sustavi uglavnom oprečni ovoj metodici, u teoriji svojom uniformnošću i sustavom vrednovanja, a u praksi otežanim uvjetima rada odgajatelja i učitelja.

4 Koju matematiku podučavati najmlađe

Prvo moramo i sami imati ispravnu predstavu što je matematika. Ona je nešto puno šire od brojeva i geometrije.⁸

Matematika je ljudska djelatnost izgradnje raznih zamisli kojima je svrha da nam služe kao sredstva za razumijevanje i kontrolu realnosti, i za organizaciju vlastitih aktivnosti.

Matematika je naše misaono oruđe spoznavanja svijeta a ne istina o svijetu.

Brojevi su samo jedna, iako najstarija i još uvijek najvažnija, takva zamisao. Pomoću prirodnih brojeva i postupka brojanja kontroliramo količine objekata. Pomoću realnih brojeva i ideje mjerjenja premjeravamo svijet. Ne samo da mjerenjem možemo nešto precizno odrediti pripadajućim brojem, nego na taj način zakonitosti prirode možemo precizno izraziti odnosima među pripadajućim brojevima. Ali matematika ne staje na brojevima, ona je nešto puno šire, a brojevi su jedan od njenih dragulja. *Cilj matematičkog obrazovanja djece nije brusiti taj dragulj nego usvojiti samo srce matematike koje stvara takve dragulje.*

Zamisao o prostoru (geometrija) u kojem se krećemo je druga takva važna zamisao. Pomoću nje kontroliramo naš položaj u prostoru, moguće smjerove i količine kretanja, kao i razne dizajne i konstrukcije. Ona nam pomaže da se orientiramo u prostoru i da registriramo i kontroliramo prostorne odnose u raznim pojavama.

No, moderna matematika je stvorila cijelu menažeriju zamisli, od jednostavnih zamisli o skupovima objekata, relacijama i operacijama među tim objektima, pa do složenih matematičkih struktura pomoću kojih opisujemo što se dešava u malim dijelovima prostora i u velikim svemirskim prostorima, pomoću kojih dizajniramo složene tehnološke procese i konstruiramo moderne uređaje, ali i organiziramo ostale matematičke strukture. Te zamisli su ugrađene u gotovo svaku složeniju ljudsku tvorevinu, od konkretnih uređaja pa do moćnih znanstvenih teorija o svijetu.

Usprkos velikoj raznolikosti moderne matematike, njena osnova je jednostavna – ona izvire iz našeg internog svijeta aktivnosti: to su aktivnosti nad kojim imamo izrazitu kontrolu i koje organiziramo i dizajniramo po vlastitoj mjeri, u našem svakodnevnom i nama podređenom svijetu. To su, na primjer, pokreti u sigurnom prostoru, grupiranje, raspoređivanje i povezivanje malih objekata, prostorne konstrukcije i dekonstrukcije s malim objektima,

⁸ U OM (= poglavlje 4 u knjizi na linku!) je dan jedan kratak pregled moderne matematike.

pričanje, pisanje i crtanje po papiru, oblikovanje i transformiranje manipulativnog materijala (glina, papir, ...), pravljenje izbora, kombiniranje i ponavljanje akcija, dinamika akcija i promjena u nama podređenoj okolini, slikanje, pjevanje, ... *Interne aktivnosti su unikatne aktivnosti ljudske vrste, naš evolucijski dar, koje su samo u tragovima prisutne kod drugih životinja.* One su dio naših urođenih sposobnosti da, za razliku od drugih životinja koje se prilagođavaju okolini, mi okolinu prilagođavamo nama. *Može se argumentirati da matematičke zamisli nastaju kroz dizajniranje, konceptualiziranje, idealizacije ili poopćenja „zbivanja“ u našem internom svijetu aktivnosti.*⁹

Lako se uvjeriti da su sve opisane aktivnosti itekako prisutne kod djece, štoviše one tvore samu osnovu dječje igre. Tokom odrastanja, ove se aktivnosti razvijaju, ali to je prvenstveno razvoj njihovog dizajniranja i konceptualiziranja (organiziramo te aktivnosti po određenim zamislama, kao npr. u postupak brojanja predmeta). *Tako je dječja igra osnovni okvir za matematički razvoj djeteta.*¹⁰

Često je svrha dječje igre razumijevanje vanjskog svijeta, npr. kad se igraju doktora ili kuhanja. Kad igra poprimi takvu svrhu tada imamo u dječjem svijetu matematički model situacije koju djeca kroz igru obrađuju. Pouka je jasna: što je više igre, to je više matematike u dječjem svijetu.

Same dječje priče se mogu razumjeti kao matematički modeli određenih pojava. Na primjer, u priči *Ivica i Marica* Baka Roga predstavlja zlo, Ivica i Marica dobro, koje, potpomognuto mudrošću, pobijeđuje zlo i opršta zavedenim (njihov otac) ali ne i nepopravljivo zlim (Baka Roga i mačeha). Ovdje su matematika i umjetnost gotovo nerazdvojivi.

I umjetnost i matematika, te unikatne kreacije ljudskog roda, imaju isti izvor: u internom svijetu dječjih aktivnosti. Oboje ih kralji kreativnost i imaginacija. One se poslije razdvajaju po svrsi: jesu li izraženje emocije ili intelekt u oblikovanju internih aktivnosti. Nažalost, „zahvaljujući“ obrazovnom sustavu, razdvajaju se i po odnosu djece prema njima. Kroz odrastanje djeteta, općenito govoreći, poprimaju suprotne vrijednosti: umjetnost ostaje privlačna a matematika postaje odbojna. Glavni razlog tome je da je u obrazovnim sustavima odnos prema umjetnosti slobodan i neobavezan dok je odnos prema matematici opterećen uskim gledanjem na matematiku i represijom „obrazovnih postignuća“. To je ono što se mora mijenjati. Da je u obrazovanju odnos prema matematici slobodan i neobavezan kao i prema umjetnosti, matematika bi djeci ostala privlačna kao i umjetnost. A razviti takav pozitivan stav kod djeteta prema matematici je daleko važnije od ijednog konkretnog matematičkog znanja.

Pored igre, djeca razvijaju matematiku kad god pokušavaju organizirati svakodnevni život uz pomoć odraslih: raspoređuju svoju odjeću po ladicama, planiraju aktivnosti,

⁹ Više o tome što je naš interni svijet aktivnosti i kako matematika nastaje iz njega možete pročitati u EYM na stranama 5-8.

¹⁰ Sve se dječje aktivnosti najbolje razvijaju kroz igru. To je već davno najjasnije prepoznao Fröbel: „Igra je najviši izraz ljudskog razvoja djeteta, ona je slobodan izraz onoga što je u djetetovoj duši.“ Pogotovo je to važno za matematiku i umjetnost, jer interne aktivnosti su samo jezgro igre, a matematika i umjetnost se upravo iz njih razvijaju.

Ukratko: dječja matematika se sastoji od svijeta dječjih internih aktivnosti koje oni eventualno svrhovito organiziraju, dizajniraju i konceptualiziraju da bi razumjeli i kontrolirali vanjski svijet i organizirali svoje djelovanje u njemu.

Na nama je da djeci

1. stvaramo okruženje u kojem mogu spontano razvijati svoje aktivnosti:
 - a. odgovarajući prostor i vrijeme: soba, dječji parkovi, plaža, šuma, ...;
 - b. manipulativni materijal: glina, pjesak, lišće, ...;
 - c. izmišljene elemente: igre, igračke, knjige, ...),
2. stvaramo odgovarajući motivacijski kontekst: priče, uređenje svojih stvari, sudjelovanje u obiteljskim poslovima, sudjelovanje u aktivnostima s drugom djecom
3. i da ih nemametljivo podučavamo u onim matematičkim aktivnostima za koje trenutno pokazuju interes. Na primjer, ako pokažu interes za savijanje i rezanje papira da im pokažemo kako se savijanjem može dobiti avion ili rezanjem savijenog papira papirnate pahulje. Samo tu moramo biti oprezni. Ako dijete odbija ili pokazuje nezainteresiranost za to što mu pokazujemo, nemojmo forsirati. Možda će sutra ili za mjesec dana upitati: „A kako se ono pravi avion od papira?“.¹¹

Stvaranje motivacijskog konteksta je posebno važno. Priče i izmišljene igre su idealne za stvaranje duhovnog okruženja u kojem će dijete prirodno pokazati interes za određene aktivnosti. Na primjer, meni je jako pomagao Darko Ban. Darko Ban je astronaut koji raketom leti po svemiru, a kad ima neki problem, noću doleti do Ninine kuće, ostavi joj problem na stol uz molbu da mu ga ona pomogne riješiti. Nina je s velikom voljom rješavala te probleme. Zauzvrat, Darko Ban bi joj ponekad s putovanja donio neki poklon, stavio ga na tajno mjesto u kući, i ostavio joj mapu na kojoj je ucrtano tajno mjesto. Nina je tako ne samo dobivala poklone već je naučila i orientirati se po mapama. Isto tako, veoma je ugodno probleme smjestiti u neku priču kao probleme koje junaci te priče moraju uz djetetovu pomoć riješiti da bi priča imala sretan završetak. Isto tako, i konkretni poslovi – pravljenje hrane, rad u vrtu, pospremanje sobe, pravljenje ptičje kućice od drveta, ... - su idealna okruženja u kojem prirodno izniču razni matematički sadržaji. Tako, pored fizičkog okruženja, trebamo stvarati i duhovno okruženje (kontekst) za djetetove matematičke aktivnosti. Ona daju djetetu potrebnu motivaciju za određene matematičke aktivnosti.

Srećom, mnoge od ovih matematičkih aktivnosti dijete razvija kroz druge sadržaje za koje je uvriježeno mišljenje da nemaju veze s matematikom: likovna umjetnost, književnost, tjelesna kultura, druženje kroz igru, organiziranje aktivnosti, vođenje brige o redu i urednosti kroz npr. vrtičko druženje ili sudjelovanje u kućanskim poslovima. Problem je što dijete ovdje može pokazati izraženije matematičke sposobnosti a da ga „proglase“ da nije za matematiku jer mu brojevi ne idu baš najbolje, vjerojatno samo zato što mu nisu tada nešto zanimljivi.¹²

¹¹ Ja sam usvojio geometriju na jednom dubljem nivou ne u školi nego igrajući nogomet. S druge strane, i dan danas sam izuzetno loš sa čvorovima. Uopće nemam osjećaj za njih, jer kao dijete nikada nisam „radio“ sa čvorovima.

¹² Meni osobno je matematika sve do šestog razreda bila totalno nezanimljiva – samo neki dril u računanju koji mi i nije išao dobro jer sam brkao kod pisanja znamenke 5 i 7.

U dalnjem praktičnjem dijelu ovog materijala bit će izdvojeni elementi koji su više matematički, u smislu da djecu osposobljavaju za izrazitiju kontrolu realnosti. No nemojmo izgubiti svijest i orientaciju da dječja matematika obuhvaća puno više od tih izdvojenih elemenata. *U osnovi je to slobodna igra i priča, kao i organizacija svakodnevnog života djeteta.*¹³

U dalnjem ću razlikovati neposredne matematičke elemente (kao što je npr. brojevi ili orientacija u prostoru) i pozadinske matematičke elemente – elemente koji su prisutni u svim matematičkim aktivnostima (kao što su npr. jezik i proceduralno razmišljanje).

Primjeri konkretnih aktivnosti će biti sortirani po matematičkim elementima koje ću u ovom preostalom dijelu uputa navesti, ali ovaj redoslijed nije bitan za njihovu upotrebu. Možete u svakom trenu bilo koji od njih ponuditi djetetu, neovisno o drugim primjerima.

2 NEPOSREDNI MATEMATIČKI ELEMENTI

1 Skupovi, relacije i funkcije

Moderna matematika je poput Lego kockica. Osnovni materijal od kojih se grade njene strukture su skupovi, relacije i funkcije. Mada su oni osnovni materijal, obično su slabije poznati od drugih matematičkih elemenata, npr. brojeva i geometrije, pa ću se ovdje malo više zadržati na njihovom opisu nego kod drugih elemenata.

Kad razmatramo neke objekte, prirodno nam se u razmatranju javljaju skupovi (mnoštva, kolekcije) tih objekata, npr. skup (grupa, skupina) djece koja se igraju u nekom parku.

Matematička ideja skupa poopćava ovu situaciju. Kad god uspijemo na neki način „izdvojiti“ neke objekte, kažemo da imamo skup kojem ti objekti pripadaju dok im drugi objekti ne pripadaju. Tako na primjer imamo i skup svih likova u nekoj bajci (što pripada skupu je jasno, mada ti likovi u realnosti ne postoje), i skup djetetovih predaka (što pripada skupu je jasno, mada mi to ne možemo efektivno utvrditi za neku osobu iz prošlosti), ali i skup djece u vrtiću starijih od 10 godina (ovom skupu ne pripada nijedno dijete – to je prazan skup).

Skupovi su jednaki kad im isti objekti pripadaju (za njih kažemo da su elementi skupa). Na primjer, skup djece u vrtiću koji su stariji od 10 godina jednak je skupu svih ljudi koji su bili na Jupiteru. Samo smo na razne načine opisali isti skup – prazan skup.¹⁴

Iz danog skupa možemo uzeti dio objekata, proizvoljno ili po nekom selektivnom svojstvu. Tako dobijemo *podskup* danog skupa. Iz dva skupa možemo uzeti zajedničke elemente i od njih napraviti novi skup, tzv. *presjek* tih skupova. Ili možemo objekte iz oba skupa uzeti sve zajedno: tako dobijemo novi skup koji nazivamo *unija* tih skupova. Isto tako možemo uzeti sve elemente koji su van nekog skupa (a unutar neke ukupne cjeline objekata koje razmatramo): tako dobijemo novi skup koji se naziva *komplement* danog skupa.

¹³ Kritika standarda matematičkog obrazovanja po ovom pitanju se može pročitati u EYM na stranama 10-19.

¹⁴ Više o skupovima možete pročitati u OM, cjeline 4.1 i 4.2.

Kad razmatramo neke objekte prirodno nam se u razmatranju javljaju relacije (odnosi) među tim objektima, npr. da su dvoje djece prijatelji, da je Ivica viši od Marice, a da je Ante djeda od Marina. Matematička ideja relacije poopćava ovakve situacije. Kad god uspijemo na neki način izdvojiti neke parove objekata kažemo da smo dobili jednu relaciju: prvi objekt u paru je u toj relaciji s drugim objektom u paru. Ovdje je bitan poredak članova u paru (zato se u matematici koristi termin *uređeni par*). Npr. ako je Ante djeda od Marina tad Marin nije djeda od Ante. Nekad možemo zamijeniti mjesta u relaciji (tad kažemo da je relacija simetrična). Npr. u relaciji „biti rođak“ to možemo uraditi, Ako je Ivan rođak Marini tad je i Marina rođak Ivanu. Kad je relacija simetrična tad ne moramo voditi brigu o poretku riječi. Npr. ovdje jednostavnije kažemo da su Ivan i Marina rođaci.

Kao i kod skupova, smatramo da su relacije jednake ako su isti parovi u tim relacijama, neovisno o tome kako smo opisali relacije.

Relacije ne moraju povezivati dva objekta (tzv. binarna relacija) već više objekata. Npr. relacija „broj x se nalazi između brojeva y i z “ povezuje tri objekta (tzv. ternarna relacija), ali binarne relacije su najčešće.¹⁵

Kad razmatramo neke objekte prirodno nam se u razmatranju javljaju funkcije (pridruživanja, preslikavanja, transformacije, operacije) među tim objektima. Na primjer, svakom čovjeku možemo pridružiti njegovu mamu. Ovdje se odmah vidi povezanost ove funkcije sa relacijom „ y je mama od x “. Funkcije su poseban tip relacija gdje su parovi povezani na specifičan način: svaki x je u paru sa samo jednim y – svaki čovjek ima samo jednu mamu. Ova jednoznačnost drugog člana u paru omogućuje da kažemo da smo x -u pridružili y , svakom čovjeku njegovu mamu. Npr. kod relacije „ y je prijatelj od x “ nemamo ovu jednoznačnost jer x može imati više prijatelja, npr. Antu i Matu, pa mu ne možemo jednoznačno pridružiti prijatelja, jer ih ima više. Isto tako „nos od čovjeka x “ opisuje funkciju (svakom čovjeku pridružujemo njegov nos) dok „uhu čovjeka x “ ne opisuje funkciju jer čovjek ima dva uha pa nemamo jednoznačnost koje mu uhu pridružujemo.

Funkciju obično opisujemo tako da zadamo jednoznačno pravilo kojem jednom objektu pridružujemo točno određeni drugi objekt. Tako dok pravilo „uhu čovjeka x “ ne opisuje funkciju, pravilo „lijevo uho čovjeka x “ opisuje funkciju jer je sad točno određeno što čovjeku pridružujemo. Ako kojim slučajem čovjek nema lijevo uho tad u neutralnom matematičkom jeziku kažemo da ova funkcija nije na njemu definirana.

Funkcije smatramo jednakim kad povezuju iste objekte neovisno o tome kako smo ih opisali. Npr. funkcija zadana opisom „idi dva koraka naprijed, okreni se za 90 stupnjeva u desno i idi tri koraka naprijed“ svakom položaju tijela (mjesto i orijentacija tijela na tom mjestu) pridružuje isti položaj kao i funkcija „okreni se udesno za 90 stupnjeva, idi tri koraka naprijed, okreni se ulijevo za 90 stupnjeva, idi dva koraka naprijed i okreni se udesno za 90 stupnjeva“. Zato kažemo da je to ista funkcija, samo opisana (zadana) na dva razna načina.

Funkcija može pridruživati paru objekata objekt, a ne jednom objektu. Takva je na primjer operacija (funkcija) zbrajanja koja npr. paru brojeva 3 i 5 pridružuje broj 8. Funkcija može „na

¹⁵ Više o relacijama možete pročitati u OM, u cjelina 4.3

ulaz“ imati i cijeli skup. Npr. funkcija „najveći“, svakom skupu prirodnih brojeva pridružuje najveći među njima.¹⁶

Skupovi, relacije i funkcije, osnovni elementi od kojih se gradi moderna matematika, u dječjem svijetu se manifestiraju kao osnovne dječje aktivnosti od kojih oni slažu složenije aktivnosti. Skupovi odgovaraju izdvajanju objekata u grupe, relacije povezivanju objekata, a funkcije akcijama nad objektima. U pomaganju djetetu u razvijanju tih aktivnosti važno je imati na umu sljedeće. Dok objekti koje skupljamo u skupove, ispitujemo relacije među njima, ili jednima pridružujemo druge, mogu biti konkretni objekti, skupovi, relacije i funkcije nemaju konkretno obilježje – ne možemo tek tako uprijeti prstom u njih. *Zbog te njihove apstraktnosti, valja izbjegavati te pojmove u radu s djecom, ne govoriti im o skupovima, relacijama i funkcijama već ih podržavati u grupiranju objekata, povezivanju objekata i akcijama nad objektima - u „izgradnji“ konkretnih skupova, relacija i funkcija.* Govorit ćemo o igračkama na stolu a ne o skupu igračaka na stolu, da su Josip i Emina rođaci a ne da su u relaciji „biti rođak“, da je Ana Ronaldova mama a ne da funkcija „mama od“ Ronaldu pridružuje njegovu mamu Anu.

S obzirom da se skupovi, relacije i funkcije javljaju u svim situacijama, oni su pozadinski matematički elementi. Međutim u dječjem svijetu se uvijek grade konkretni skupovi, relacije i funkcije, pa su oni u dječjem svijetu prvenstveno javljaju kao neposredni elementi a ne kao pozadinski elementi koje djeca koriste u svim situacijama. S obzirom da, kako gornji primjeri svjedoče, oko nas sve vrvi od skupova relacija i funkcija, materijala za „izgradnju“ konkretnih skupova, relacija i funkcija ima na pretek.¹⁷

U dijelu AKTIVNOSTI je navedeno cijelo mnoštvo aktivnosti sa skupovima, relacija i funkcijama koji „nastanjuju“ dječji svijet.

2 Strukture

Od skupova, relacija i funkcija gradimo matematičke strukture. Kao što s Legićima od osnovnih elemenata gradimo složenije konstrukcije, tako i ovdje, naprsto uzmem par skupova, u njima istaknemo neke elemente, dodamo neke relacije i funkcije među njima, i sve to gledamo kao novu cjelinu.

Npr. možemo izdvojiti neki skup ljudi s relacijom među njima „biti susjed“. Strukturu koja se sastoji od jednog skupa s nekom relacijom na tom skupu nazivamo relacijska struktura. U dijelu s relacijama, stalno smo relacije gledali nad nekim skupom, pa smo u stvari stalno radili s relacijskim strukturama.

Ako nad skupom izdvojimo neke operacije (funkcije), tad govorimo o algebarskoj strukturi. U dijelu s funkcijama stalno smo funkcije gledali ne same za sebe, već kako djeluju nad nekim skupovima, pa smo u stvari radili s algebarskim strukturama.

¹⁶ Više o funkcijama možete pročitati u OM, cjelina 4.4.

¹⁷ Detaljnije razmatranje o skupovima, relacijama i funkcijama u dječjem svijetu izloženo je u EYM na stranama 12-14.

Od jednostavnijih struktura gradimo složenije strukture. Jedna takva struktura je struktura realnih brojeva. Ona se sastoji od skupa realnih brojeva, među kojima imamo dva istaknuta elementa nulu i jedan, četiri operacije – zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje – i relaciju usporedbe među brojevima.¹⁸

U dječjem svijetu se izgradnja struktura od skupova relacija i funkcija manifestira u organiziranju osnovnih aktivnosti u složenije aktivnosti koje imaju neku cjelovitost i svrhovitost. Takve su na primjer razne igre, ali i organizacija i planiranje u izvršenju neke namjere (uređenja sobe, putovanja do nekog mjesta, redoslijeda obilaska zoološkog parka, itd.).

U dijelu AKTIVNOSTI su navedene neke aktivnosti koje su usko vezane s nekim jednostavnim matematičkim strukturama.

3 Prirodni brojevi

S obzirom da se u standardima matematičkog obrazovanja, pa tako i u onome što se komercijalno nudi na tržištu, previše pažnje daje brojevima, koristi težak rječnik i stvari se postavljaju gotovo sudbonosno – „ako dijete sad ne stekne duboko razumijevanje brojeva i operacija s njima ono će biti matematički zauvijek upropasti“ – moram odmah reći da je to totalno pogrešno. Radi se nepotreban pritisak i na roditelje i na odgajatelje, i što je najgore, na djecu. Kao što je moja kćer rekla: „Šta su navalili s tim brojevima. Pa svi nauče brojati i računati, prije ili poslije.“ Taj je pritisak pogotovo izražen jer se prerano forsiraju algoritmi izvršenja računskih operacija koji su u toj dobi djeci previše umjetni, ako se rade formalno, a previše složeni, ako se djeci pokušavaju sadržajno objasniti.

Brojevi jesu najstarija i još uvijek najznačajnija matematička struktura, ali nisu nikakav bauk niti mjerilo matematičkog razvoja djeteta. Oni trebaju polako rasti u dječjem svijetu, možda i godinama. S obzirom da znaju biti „dosadni“, trebamo dobro paziti da se prirodno razvijaju u dječjem svijetu, a ne da ih namećemo kao ishode učenja koje dijete obavezno treba postići. Takvim sudbonosnim pristupom i zahtjevima da se postignu zacrtani ishodi samo frustriramo dijete i udaljavamo ga od matematike. Svođenje matematike na brojeve i forsiranje dječjih postignuća s brojevima glavni je razlog zašto imamo toliko ljudi koji ne vole matematiku i misle da su nesposobni za matematiku.¹⁹

Prirodni brojevi nastaju iz aktivnosti vezanih uz usporedbu skupova objekata. Povezujući objekte iz jednog skupa s objektima iz drugog skupa tako da je uvijek jedan objekt iz jednog skupa povezan s najviše jednim objektom iz drugog skupa možemo utvrditi ima li u skupovima isto objekata ili ih u nekom ima više. Npr. ako u parku svako dijete odjednom ide na ljljačku, birajući svoju ljljačku, djeca će lako utvrditi ima li isto djece i ljljački ili ima viška ljljački ili će neko dijete ostati bez ljljačke. Tako je prva i osnovna stvar pomagati

¹⁸ Više o strukturama možete pročitati u OM, cjelina 4.5.

¹⁹ O nepotrebnom i opasnom pritisku koji standardi matematičkog obrazovanja postavljaju na usvajanje brojeva možete pročitati u EYM na stranama 11-12.

djetetu u razvijanju ovakve tzv. 1-1 usporedbe skupova. Takvim postupkom djeca lako ustanovljavaju gdje ima više a gdje manje objekata, i kada ih ima isto.

Sljedeći je korak usvajanje procesa brojenja i prirodnih brojeva kao objekata kojima brojimo. Procesom brojenja objekata u nekom skupu uspostavljamo 1-1 vezu s početnim nizom brojeva, i broj na kojem stane prebrajanje je mjera tog skupa. Npr. ako smo izbrojali da su u nekom skupu tri predmeta uspostavili smo 1-1 vezu između tih predmeta i početnog niza brojeva: 1,2,3. Zadnji broj u tom nizu, broj 3, je mjera tog skupa. Sada, umjesto da direktno uspoređujemo skupove, uspoređujemo njima pridružene brojeve. Npr. ako jedan skup ima tri objekta a drugi pet, s obzirom da se pet javlja nakon tri u nizu brojeva, znamo na osnovi ovih mjera da drugi skup ima više objekata.

Pa šta su onda prirodni brojevi? Ovo naizgled teško pitanje je u osnovi nebitno pitanje. Objekte koje izaberemo za standard pomoću kojih brojimo nazivamo brojevi. Ako brojimo pomoću reckica na štapu ili kamenčića tada su to brojevi. Za brojanje je samo važno da imamo prvi broj od kojeg započinjemo brojanje, nazivamo ga *jedan*, i da svaki broj ima sljedeći broj (novi u odnosu na sve prethodne brojeve) kojim možemo nastaviti brojanje, ako je to potrebno. Konceptualno, nema razloga da izdvojimo neke posebne objekte za tu svrhu. Praktično, za potrebe brojanja i računanja izaberemo neki pogodan standard, u prošlosti kuglice na abakusu, danas nizove decimalnih znamenki na papiru ili bitova u računalu. Zamisao o prirodnim brojevima je kao i zamisao o šahu. Kao što šah možemo igrati sa drvenim figuricama ili pak sa likovima na računarskom ekranu, ili pak dopisno s oznakama na papiru, tako i za brojeve možemo izabrati razne standarde. Kao što igru šaha uvijek možemo prenijeti s jedne realizacije na drugu tako i brojanje i računanje uvijek možemo prenijeti s jednog standarda na drugi.²⁰

Pa šta su onda prirodni brojevi u dječjem svijetu? To su naprsto izgovorene riječi: *jedan, dva, tri, ...* jer je to najjednostavniji i najdostupniji niz objekata pogodan za brojanje. To upravo mi koristimo kad brojimo, i djeca lako to usvajaju od nas. Vremenski redoslijed izgovaranja prirodno određuje što je prvi broj – prva izgovorena riječ – i nakon svake izgovorene riječi imamo u vremenskom sljedeću izgovorenu riječ – sljedeći broj. Kad djeca uče brojati na engleskom: *one, two, three, ...*, samo su prešla na drugi standard za brojanje. U standardima matematičkog obrazovanja, kao i na komercijalnom tržištu, djeci se brojevi predstavljaju kao pisani simboli - numerali: 1, 2, 3, ..., 12, Numerale je bolje izbjegavati, odnosno ne pridavati im važnost na početnom nivou usvajanja brojeva iz više razloga. Osnovni razlog je da oni nemaju prirodan poredak kakav imaju izgovorene riječi u vremenskom slijedu, a što je bitno za proces brojanja. Nadalje, oni zahtijevaju od djece određene vještine čitanja i zapisivanja, što je kompleksan proces, koji djeca još nisu automatizirala, i koji nepotrebno opterećuje matematički sadržaj (zbog ovog razloga općenito valja izbjegavati ili pak minimizirati pisanje i čitanje u matematičkim aktivnostima u ovoj dobi, odnosno uvoditi onoliko koliko se djeca trenutno spremna za to). Nadalje, numerali su simbolički zapisi (ne čitamo ih kao obične pisane riječi) koji unose nepotreban element apstrakcije u proces brojanja.

²⁰ Više o brojevima možete pogledati u OM na strani 339-348.

U prirodne brojeve možemo ubaciti na početak i novi broj koji nazivamo *nula*. Nulu možemo shvatiti kao broj koji označava početno stanje brojanja, stanje prije nego što smo započeli brojanje. Ako u skupu koji nastojimo prebrojati uopće nema objekata (npr. želimo vidjeti koliko je ostalo kolača u frižideru, a ispadne da su svi pojedeni) tad ne možemo nastaviti brojanje – ostali smo na broju nula, pa je on tako mjeru praznog skupa: on ima nula elemenata. Zbog iznenađenja koje obično prati otkriće da nečega nema, djeca lako prihvaćaju nulu (od latinskog *nihil* = ništa).

Prebrajanjem djeca mogu utvrđivati u kojem skupu ima više objekata tako da uspoređuju brojeve koje su pridružili tim skupovima u procesu brojanja - koji se broj javlja prije a koji poslije u vremenskom nizanju brojeva (kao što sam naveo, samu riječ *skup* valja izbjegavati ili barem ne isticati).

Djeca direktno razumiju koji je broj neposredni sljedbenik danog broja (onaj sljedeći u vremenskom nizanju, npr. iza pet dolazi šest) i neposredni prethodnik (onaj prethodni u vremenskom nizanju, npr. prije šest je pet) mada im je prethodnika teže odrediti jer moraju u glavi obrnuti vremenski redoslijed, vratiti se u neposrednu prošlost, da bi utvrdili prethodnika danog broja.

Također, djeca mogu izvršavati i jednostavnije operacije s brojevima - zbrajanje i oduzimanje. Ali to treba raditi usmeno i sadržajno. Ne na papiru, jer pisanje i čitanje, kao što sam već naveo, nepotrebno opterećuje matematički sadržaj koji tako gubi na jasnoći. I ne formalno (kad se nešto radi samo s formom), nekim postupkom sa znamenkama ili glasovima, nego sadržajno, jer formalni postupci su djeci uglavnom strani. Sadržajno gledano, zbrajanjem se pomoću brojeva reprezentira spajanje skupova a oduzimanjem „vađenje“ jednog skupa iz drugog. Tako, npr. da zbroje četiri i pet, trebaju sakupiti četiri objekta, zatim novih pet objekata i zatim prebrojati koliko ih sve skupa ima (zbroj je devet) a da od pet oduzmu četiri trebaju sakupiti pet objekata i iz njih izvaditi četiri objekta (razlika je jedan).

Ako dijete pokazuje interes za formalno zbrajanje i oduzimanje, niže u aktivnostima s brojevima pokazano je kako ono to može uraditi (strana 56).

Mislim da je dovoljno zadržati se na ovome u predškolskom uzrastu, ne ići na prevelike brojeve i na druge operacije (npr. množenje i dijeljenje), osim ako dijete pokazuje interes za takvo nešto, ili se to prirodno pojavi u kontekstu.²¹

4 Geometrija

Dječji prostor je prije svega prostor njihovih pokreta, konstrukcije i dekonstrukcije u prostoru, navigacije u prostoru, i u njihovom geometrijskom razvoju naglasak treba biti na razvoju ovih aktivnosti. Oni to najbolje razvijaju na dječjim igralištima, u sportskim

²¹ Meni nije bilo ni na kraj pameti da s Ninom radim množenje i dijeljenje, ali smo praveći autiće od kartona (pogledajte primjer na strani 47) prirodno došli u situaciju da neke brojeve pomnožimo i podijelimo.

aktivnostima, orientiranjem u prirodi i praveći razne konstrukcije s „kockama“ (drvena tijela, lego kocke, magnetski likovi ...), glinom, papirom, itd.

Tome još treba dodati razvijanje vizualne reprezentacije problema pomoću kojih dijete stvara matematičke modele za različite situacije. Npr. obično crtanje slona je stvaranje jednog takvog modela u kojem dijete pored stvaranja modela slona (koji se vremenom sve više popravlja) razvija osjećaj i za prostorne odnose. Zato u geometrijskom razvoju treba djetetu omogućiti da što više crta ili modelira u glini, tijestu i sl. Ovdje spada i čitanje i pravljenje prostornih mapa sobe, okoline u kojoj živi, parka u kojem se igra itd.²²

S obzirom da se u standardima matematičkog obrazovanja (pa tako i na komercijalnom tržištu proizvoda za djecu) forsiraju geometrijski likovi i tijela – trokuti, četverokuti, ...kvadri, ..., i njihova svojstva – istaknuo bih ovdje da im ne treba davati toliko pažnje. Na ovom nivou djeci su to samo likovi za konstrukcije i dekonstrukcije, i oni ih kroz te aktivnosti usvajaju. Sami likovi ih van tih aktivnosti naročito ne zanimaju. Mnogi misle da su djeca usvojila geometriju kad usvoje razlikovanje i svojstva tih likova. Nije tako. Za njihov geometrijski razvoj su najvažnije aktivnosti opisane u prethodna dva paragrafa.

5 Ostalo

Ovdje bih istaknuo još neke matematičke ideje koje prirodno izviru iz dječjeg svijeta, i koje će isto biti zastupljene u dijelu AKTIVNOSTI, ali ne kao izdvojene teme već kao aktivnosti unutar „većih“ tema (strukture, geometrija, proceduralno razmišljanje ...). To su ideje **rekurzije** (polazni elementi plus pravila konstrukcije – prisutno u gotovo svim igrama ili geometrijskim konstrukcijama), **stanja i prijelaza** (prisutno u većini igara - obično je prikazujemo grafovima gdje su točke stanja a prijelazi su strelice koje povezuju točke), **transformacije** (prisutno kad god nešto mijenjamo po nekim pravilima – vrsta realizacije pojma funkcije) **anализе и синтезе** (rastavi, analiziraj, sastavi – svugdje se javlja), **симетрије** (može se sasvim lijepo razvijati unutar geometrijskih aktivnosti), **координатације** (objekti se obilježavaju (predstavljaju) nekim znakovima, u razvijenijoj formi najčešće brojevima), **блискости и апроксимације** (mogu se razvijati unutar geometrijskih i brojevnih aktivnosti), **случаја** (tipičan primjer je bacanje kocke u nekoj igri ili u pravednoj raspodjeli, npr. određivanju tko će započeti igru), **избора** (kad vođeni nekim ciljem radimo izbor za koji mislimo da nas vodi bliže cilju), **понављања** (nešto ponavljamo dok se ne postigne cilj), **промјене** (nešto je poraslo, ili se smanjilo, nešto brže, nešto sporije), itd.

²² Više o geometrijskim aktivnostima možete pročitati u EYM na stranama 15-16.

3 POZADINSKI MATEMATIČKI ELEMENTI

Pozadinski matematički elementi su elementi koji su prisutni u svim matematičkim aktivnostima.

Takvi su **skupovi, relacije i funkcije**, koji su ovdje stavljeni pod neposredne matematičke elemente jer su uglavnom na taj način prisutni u dječjem svijetu. Naravno, djecu trebamo poticati da u svim svojim aktivnostima koriste te elemente: uočavaju određene skupove, relacije i funkcije relevantne za danu situaciju.

U pozadinske matematičke aktivnosti još spadaju razvijanje sposobnosti apstrahiranja i reprezentiranja problema, proceduralne aktivnosti, logika i jezik. No, po meni, najznačajniji je jezik, pogotovo što on obuhvaća logiku i proces apstrahiranja. Važnost reprezentiranja je već razmatrana u varijanti geometrijskog reprezentiranja. Isto tako, kao što je spomenuto u uvodnom dijelu, kad se djeca igraju neke situacije (doktora, policajaca, ...) oni u takvoj igri reprezentiraju određene životne situacije. To će još biti ilustrirano niže u dijelu o rješavanju problema. Također, kroz dječje priče se reprezentiraju određene situacije, kao što će niže u dijelu o jeziku biti ilustrirano.

1 Jezik

Jezik je možda najvažnije čovjekovo sredstvo za kontrolu realnosti.²³ Ne samo da jezikom prenosimo znanje već ga jezikom i oblikujemo. Zato je jezik veoma važan dio matematike. On je od početka prisutan u dječjim aktivnostima i najbolje se kroz njih razvija. Za razliku od mene, većina ne smatra da je jezik dio matematike. No bez obzira na to, smatrali jezik dijelom matematike ili ne, razvoju djetetova jezika treba posvetiti veliku pažnju.

Jezik je veoma moćna matematika. Izborom riječi u nekoj situaciji radimo apstrakciju, izdvajamo iz situacije ono što nas zanima i apstrahiramo ostalo. To je naš ključni mehanizam pomoću kojega se nosimo sa kompleksnošću svijeta. Kad recimo analiziramo nogometnu utakmicu riječima poput *ofsajd, dribling, dupli pas, ...*, izdvajamo ono što je bitno za igru i na to usmjeravamo pažnju, dok apstrahiramo frizuru suca, pticu koja je preletjela preko stadiona, itd.

Furthermore, we use words to structure and control those aspects of the situation that interest us. Let's put ourselves in the role of those who once upon a time invented the football game. They had to introduce all these words into the language, give them meaning and thus turn the uncontrolled race for the ball into a structured game. Nouns give us control over objects, and predicate expressions over actions. Moreover, we use predicate expressions to shape and clarify concepts.

Tako je jezik bitan matematički element koji treba razvijati od najranijeg djetinjstva. Poput nas, tako i dijete razumije i kontrolira realnost pomoću jezika (zna izraziti da je gladno,

²³ Ako nekog zanima važnost jezika za ljudsku racionalnu spoznaju može pogledati moj članak *The language essence of rational cognition with some philosophical consequences* objavljen u časopisu *Tesis*: <https://philpapers.org/archive/CULTLE.pdf>.

razumije kad mu mama kaže da će brzo doći kući, ...). Kao što su pomoću jezika tvorci nogometne igre trčanje za loptom dizajnirali u nogometnu igru, tako i dijete pomoću jezika dizajnira i konceptualizira svoje aktivnosti, strukturira ih u osmišljene celine. Od lego kocaka će napraviti kuću (za to mu je potreban pojam kuće), uz pomoć odraslih će glasovno nizanje brojeva pretvoriti u moćan mehanizam prebrajanja elemenata u nekom mnoštvu,

Zato jako puno pomažemo djetetu u matematičkom razvoju kad god mu čitamo priče, slušamo ga kad ono nama priča priče, opisuje razne situacije i izražava svoje osjećaje, i kad ga ohrabrujemo na komunikaciju s drugom djecom i odraslima.

Potičući ga na izražavanje u svim ostalim matematičkim aktivnostima, kao i drugim aktivnostima, pomažemo mu da pravi apstrakciju i da utočnjava pojmove i značenja riječi. Na primjer, komponiranje tangrama od geometrijskih likova uči ga da apstrahira irrelevantne elemente likova (tip materijala, debljina dijelova) i izdvaja bitne elemente (oblik i dimenzija) za rješavanje problema. Ujedno usvaja npr, pojam trokuta i počinje razlikovati svojstva trokuta i svojstva kvadrata. Ukratko, utočnjujući jezik u matematičkim aktivnostima, dijete utočnjava svoju matematiku.

Jezikom se grade dječje priče koje su u osnovi matematički modeli raznih zbivanja (u uvodnom dijelu sam to objasnio na primjeru priče Ivice i Marice). Preko priča dijete stječe razumijevanje tih zbivanja. Kad samo počinje izmišljati priče, ono samo počinje stvarati matematičke modele pomoću kojih pokušava nešto razumjeti. Sve su to veoma važne matematičke aktivnosti.

Pored navedenog, jezik otvara djetetu put prema idealiziranim matematičkim svjetovima koji proizlaze iz njegovih aktivnosti. Ono će tako npr. kroz aktivnosti s brojevima i pojmove koje je tamo usvojio polako stvarati sliku o idealiziranom svjetu brojeva, govorit će o svim brojevima i razumjeti šta to znači da ih ima beskonačno. U geometrijskim aktivnostima će polako razvijati idealizirane pojmove točke, pravca i ravnine, u jednoj fazi razvoja početi govoriti o paralelnim prvcima koji se nikada ne sijeku, dok se ostali sijeku u točno jednoj točki, itd. Djetetu nije problem zamišljati idealizirane matematičke svjetove (ne mora ih ispravno zamišljati – to dolazi vremenom, kao dio učenja). Kao što jezikom opisuje priču o Snjeguljici i sedam patuljaka, tako jezikom opisuje i svijet svih brojeva.

Još bih istaknuo da na predškolskom nivou djeca jezik koriste u svojim aktivnostima, ali sam jezik nije predmet njihovih aktivnosti. Na primjer, dijete će koristiti predikatski izraz „biti plav“ u sortiranju predmeta ali neće analizirati šta to znači „biti plav“. Uloga jezika u njihovom svijetu je ista kao i uloga skupova, relacija i funkcija. Isto se dešava sa svim pozadinskim matematičkim elementima. Njih djeca upotrebljavaju kao alat u aktivnostima, ali ne razmišljaju o njima. Kao što koriste olovke za crtanje ne zadržavajući pažnju na samim olovkama.²⁴ Razmišljanje o pozadinskim matematičkim elementima dolazi poslije.

²⁴ Standardi matematičkog obrazovanja gotovo da ne prepoznaju matematičko bogatstvo jezika.

2 Logika

Bez obzira kako gledali na logiku, ona se uvijek manifestira kao logika jezika – u povezivanju istinitosnih vrijednosti rečenica: šta nam poznavanje istinitosti ili laži jednih rečenica govori o istinitosti ili laži drugih rečenica. Tako, usvajanjem jezika djeca usvajaju i logiku.

Djeca kroz upotrebu jezika usvajaju smisao veznika *nije, i, ili, ako ... onda, ...*. Najprije usvoje negaciju („Neću ići u vrtić“) i kondicional („Ako mi pustiš crtić, prestat će me boljeti koljeno.“). Brzo usvoje i kvantifikatore za *svaki* (svi – „Sve su lutke u sobi“) *postoji* (neki – „Netko je u podrumu“),

Djeca su puna maštete i kreativnosti, i u svom zamišljanju i razmišljanju imaju izraženu logičnost. Logičko zaključivanje im izvrsno ide²⁵ i jako dobro otkrivaju nekonzistentnosti u priči, odnosno vode brigu da priča bude konzistentna.²⁶

*Potičući djecu da prepričavaju ili sami izmišljaju priče i da prepričavaju događaje, da diskutiraju priče i događaje s drugom djecom ili odraslima, da traže razloge za određena djelovanja i zbivanja, i da izvlače zaključke iz raspoloživih informacija, najbolje djeci pomažemo u razvijanju logike.*²⁷

3 Proceduralno razmišljanje

Proceduralno razmišljanje (kako nešto postići) je primjereno dinamici dječjeg svijeta nego deklarativno razmišljanje (što jeste a što nije).

Procedure moraju biti sadržajne a ne formalne i moraju, barem u početnoj fazi, biti izražene govornim i slikovnim jezikom a ne pisanim jezikom, i postepeno se preciziraju u dječjem svijetu.

Prijelaz na formalne procedure, kao na algoritme za računske operacije, je zahtijevan prijelaz, jer formalne procedure gube sadržajnost i uključuju vještinu čitanja i pisanja koju djeca u toj dobi još nemaju. Već sam kod brojeva napomenuo zašto naglasak mora biti na sadržajnosti i gororu, da je formalan pristup (rad sa formom) djeci u toj dobi stran, a čitanje i pisanje opterećuje matematički sadržaj jer djeca još nisu dovoljno vješta u čitanju i pisanju. Utočnjavanje procedura treba biti postepeno jer se tim utočnjavanjem gubi sloboda djelovanja ali dobiva preciznost. Konačno, i mi odrasli ne volimo detaljne instrukcije, već radije općenitije koje nam ostavljaju dovoljno prostora za samostalno djelovanje, Kod djece je ovo još izraženije.

Proceduralno razmišljanje obuhvaća pravljenje izbora (“izabrat ću ovu tavu”, komponiranje akcija (“usut ću prvo vodu, pa onda brašno”) i strukturiranje akcija kroz ponavljanje niza akcija dok se ne ispuni neki uvjet, (npr. “miješaj smjesu dok se ne stvrdne”).

²⁵ Baka: “Djed božićnjak nosi poklone samo dobroj djeci.”, Nina: “Onda Ezra neće dobiti poklon.”, Baka: “Zašto?”, Nina: “Jer nije bio dobar: udario me je.”

²⁶ Ja: “Kako ti se zove lutka?”, Nina: “Aurora”, Ja: “Zar mi nisi jučer rekla da se zove Julija?”, Nina: “Da, ali ona stalno mijenja ime.”

²⁷ Standardi matematičkog obrazovanja uopće ne prepoznaju bogatstvo dječje logike.

Proceduralno razmišljanje se najbolje razvija kroz nabrajalice (npr. "ententini"), odgovarajuće priče (npr. *Djed i repa*, *Pošla koka na Pazar*) i pjesme (*Kad si sretan*), prostorne upute (npr. "idi ravno do sjedalice, onda desno, ...), recepte za kuhanje, itd.

Razvoj ove proceduralne komponente razmišljanja je danas posebno važno zbog sve veće važnosti softwarea u modernim društву.

Pojavili su se i jednostavnii programske jezici kakav je npr. *Scratch* (<https://scratch.mit.edu/>) u kojem djeca u slikovitom okruženju mogu dizajnirati likove i programirati priče. Međutim, osobno sam suzdržan po pitanju kad djeci i u koliko mjeri dodati računala u njihov svijet. Skloniji sam da se to izbjegava za predškolce. Priroda je (još uvijek) njihovo prirodno okruženje.²⁸

4 Rješavanje problema

Rješavanje problema nije specijalno matematička aktivnost, ali je ovdje stavljen u pozadinske aktivnosti jer je ono sveprisutno prirodno okruženje za razvijanje svih matematičkih aktivnosti.

Bitna komponenta matematike je da ona ima svrhu: ona je misaono sredstvo naše racionalne spoznaje i racionalnih aktivnosti općenito. To vrijedi za djecu, kao i za odrasle. Jedino što svrha matematičkih aktivnosti djeteta mora biti ukomponirana u njegov svijet, a ne u naš svijet odraslih, u čemu se često griješi.

Kao što je cijela ljudska civilizacija razvila matematiku kao oruđe za rješavanje velikih i malih problema, i kao što je pojedinci razvijaju, na isti način i djeca najbolje razvijaju matematiku rješavajući probleme iz svog dječjeg svijeta. Kao i u svijetu odraslih, tako i u dječjem svijetu ova svrha daje matematičkim aktivnostima integritet – prirodno okruženje za njihov razvoj. Zato ovu komponentu moramo imati stalno na umu kad pomažemo djeci u matematičkom razvoju. Priče i igre su idealno okruženje za postavljanje problema i motiviranje djeteta da ga riješi. Isto tako su to i problemi koji se javljaju u svakodnevnoj organizaciji života (oblačenje, raspoređivanje igračaka po policama, ladicama i kutijama, ...). Prebrajanje može biti djetetu samo za sebe zanimljivo, ali ono poprima pravo značenje tek kad dijete brojanjem provjerava jesu li svi medvjedići prisutni na jutarnjoj smotri plišanaca.

²⁸ Standardi matematičkog obrazovanja ne prepoznaju sadržajno proceduralno razmišljanje.

2 AKTIVNOSTI

Većina aktivnosti nije do kraja razrađena, već su dane, nadam se, dovoljno jasne upute za realizaciju aktivnosti. Pored toga, na vama je i da stvorite fizička i motivacijska okruženja za neke od aktivnosti. Tako, *ove aktivnosti i od vas traže da budete aktivni* (što je dobro). Prije konkretnih evo i nekih „općih“ aktivnosti.

A1: Stvaranje fizičkog okruženja. Napominjem još jednom, najvažnije je da stvaranjem odgovarajućeg prostora u kući, vođenjem djeteta u park ili prirodu, organizirajući druženje s drugom djecom, nabavljujući prikladan manipulativan materijal („kockice“, papir, bojice, glina, ...) omogućite slobodno igranje, uz eventualnu vašu pomoć. Neki idu čak toliko daleko da smatraju da je najbolje u toj dobi samo pustiti dijete da se igra. To je sigurno puno bolje nego raditi pritisak na dijete, ali je ipak najbolje nemetljivo pomagati djetetu da se razvija kroz tu igru.

A2: Stvaranje motivacijskog okruženja. Pored stvaranja fizičkog okruženja, još je važnije stvoriti motivacijski kontekst u kojem će dijete prirodno pokrenuti neke aktivnosti, kao npr. slagati kućice od kockica, skicirati mapu svoje sobe, raspoređivati robu po policama, Pored ovih uputa dobro je nabaviti knjige koje nude razne misaone aktivnosti: labirinti, traženje pravog puta, zaokruživanje likova koji ispunjavaju neko svojstvo, povezivanje likova, nastavljanje niza, traženje razlika u crtežima, ... Te knjige su pune raznolike matematike, samo znaju biti opterećene brojevima, pogotovo što dijete opterećuju zapisima brojeva u kojima se gubi prirodnost brojanja (vidjeti stranu 13). S takvim brojevnim zadacima budite pažljivi: bolje ih preskakati nego opterećivati dijete. Pri korištenju takvih knjiga, valja izmisliti neku priču u koju se djetetu prirodno javlja potreba da rješava takve zadatke. Meni je tu pomogao Darko Ban (vidjeti stranu 8). Kad dijete jednom prihvati takve zadatke, ono će poslije samo tražiti od vas da mu ih još nabavite.

Zgodno je pokušati zadatke iz knjige realizirati u stvarnom prostoru sa stvarnim predmetima. Djetetu su osnovne fizičke aktivnosti. Slike nose jedan nivo apstrakcije koji je isto dobro razvijati, jer su (ali su) one korak dalje u matematičkom razvoju u odnosu na stvarne aktivnosti. Isto je i s ostalim matematičkim aktivnostima: kad god možemo prenesimo matematičke aktivnosti sa „šaranja“ po papiru na aktivnosti sa stvarnim objektima.

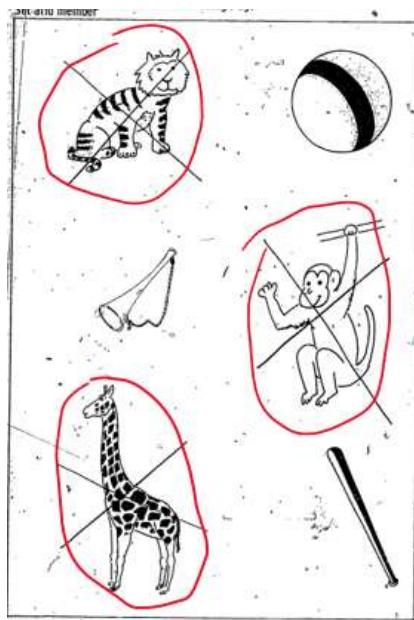
1 Skupovi

Samu riječ „skup“ bolje ne spominjati, ili barem je ne isticati. Kratko objašnjenje pojma skupa i operacija sa skupovima se nalazi na strani 9.

A1: Pripada li nešto nekom skupu ili ne. Na osnovnom nivou to su pitanja tipa „Je li medvjedić među plišancima u twojoj sobi?“, „Je li ti džemper sa snjegovićem u ladici“, „Je li naše auto na ovom parkiralištu“, ... Malo apstraktnije, kada dijete ispituje ima li neki objekt neko svojstvo (je li autić plav, je li kocka drvena, ...) on tako razvija poimanje raznih svojstava.

Zgodna je aktivnost ovog tipa igra „Leti, leti...“ Netko izgovara Leti, leti...miš“ Ako objekt ne leti djeca čučnu, a ako leti stoje na nogama. Ili ako kaže istinu dijete stoji, a ako kaže laž dijete čučne.

Na internetu ili u knjigama s dječjim aktivnostima možete naći activity sheets tipa „zaokruži sve životinje na slici“ ili sve predmete koji se nalaze u dječjem vrtiću.



(The School Mathematics Study Group (SMSG) material)²⁹

Isto tako za nepripadnost imamo slične activity sheets, na primjer

Find it
Circle the picture in each row that does not belong to the group.

Sort out and circle shapes that are different.

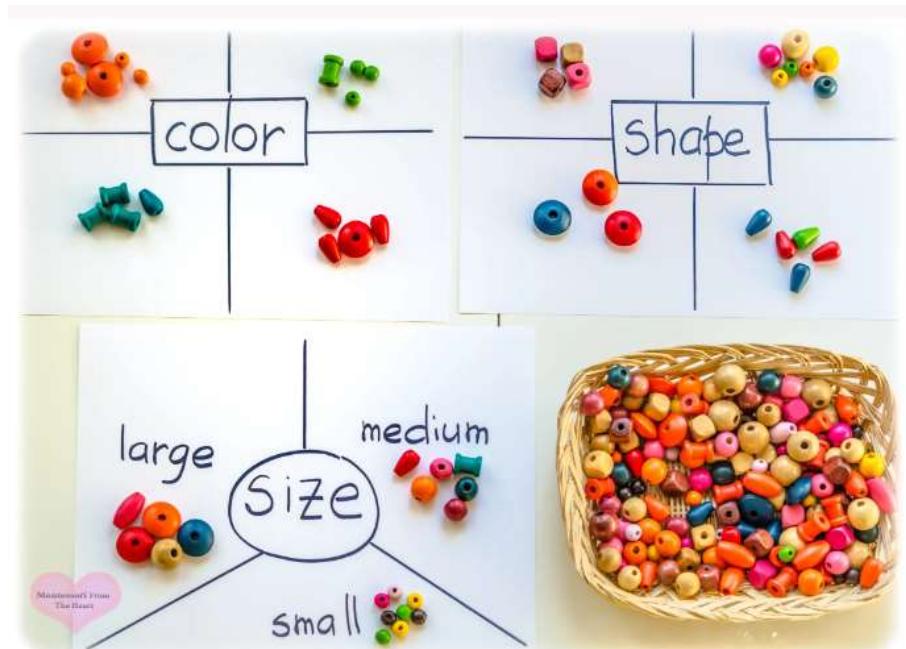
<input type="checkbox"/>				
<input type="checkbox"/>				
<input type="checkbox"/>				
<input type="checkbox"/>				
<input type="checkbox"/>				

(uzeto s interneta, nepoznata mi je stranica)

²⁹ SMSG je bila grupa matematičara koja je pokušala šezdesetih i sedamdesetih godina prošlog stoljeća uvesti modernu matematiku u USA obrazovanje, Na Internet Archive web siteu se može naći dosta njihovog materijala.

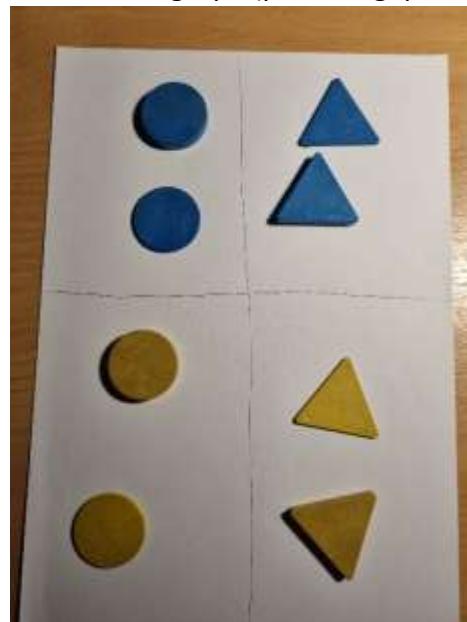
A2: Razvrstavanje.

Po nekim isključivim svojstvima razvrstavamo objekte u razdvojene grupe (skupove). Npr. po boji ili obliku, ili pak razvrstavanje odjeće po vrsti u ladice (hlače, majice, čarape, ...)

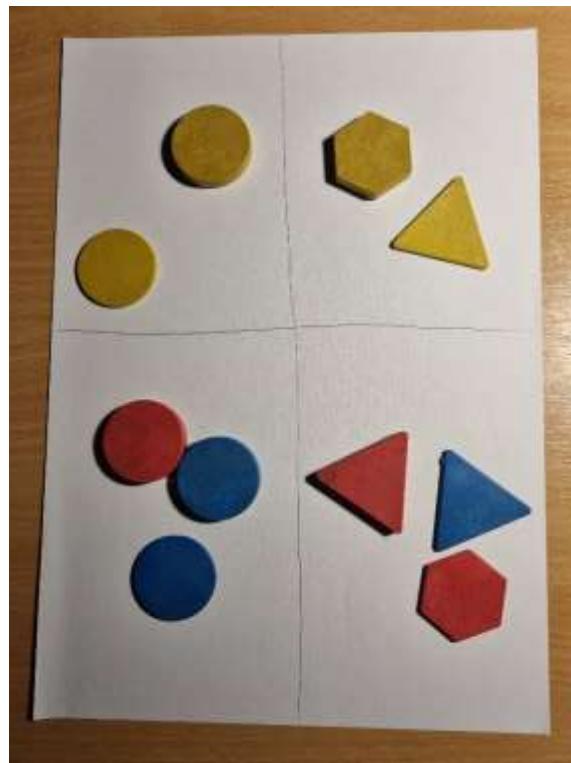


[\(https://montessorifromtheheart.com/\)](https://montessorifromtheheart.com/)

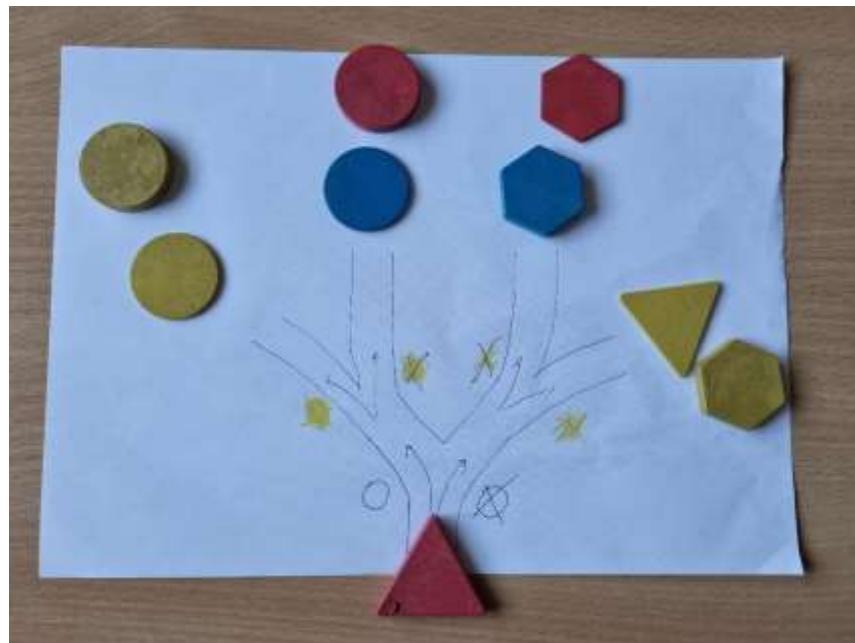
Složenje razvrstavanje je kad razvrstavamo po dva svojstva, npr. po boji (plav ili žut) i po obliku (krug ili trokut). Tako dobivamo 4 grupe (plavi krug, plavi trokut, žuti krug, žuti trokut)



Još složenje je kad razvrstavamo po dva svojstva koja predmet može ili ne mora imati, npr žut i krug. Tad imamo opet četiri grupe (žut i krug, žut i nije krug, nije žut i krug, nije žut i nije krug):



Još složenije razvrstavanje se može obaviti pomoću „tračnica“:

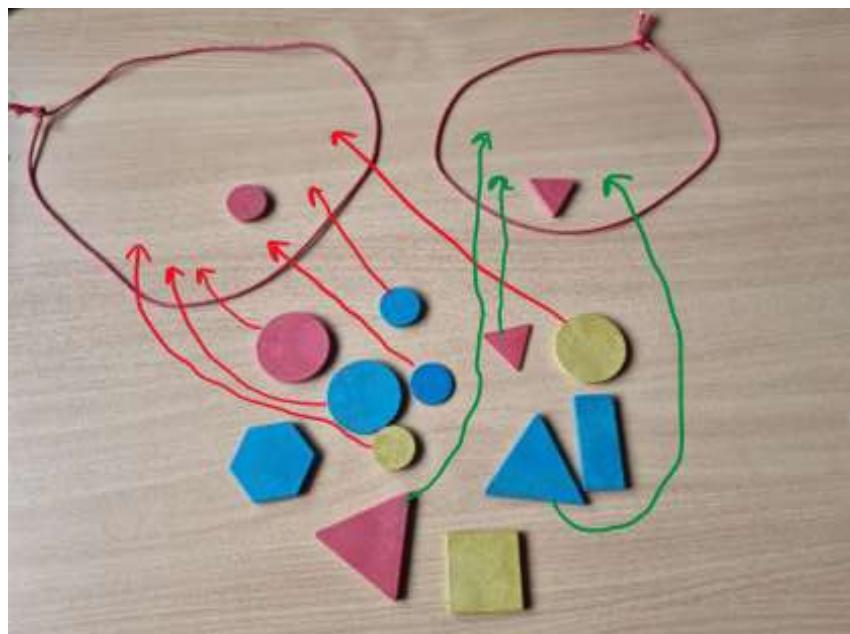


A3: Objedinjavanje objekata u skup. Na ovom nivou to je prije svega prostorno sakupljanje objekata u kutije, na hrpe, itd, bilo proizvoljno ili po nekom svojstvu. Tako dijete utočnuje poimanje raznih svojstava. Mogu se objedinjavati i „lasom“ - konopcem, proizvoljno ili po nekom svojstvu. Ili crtanjem (zatvorena crta) na slici. No uvijek je bolje sa stvarnim predmetima nego sa crtežima. Primjer:

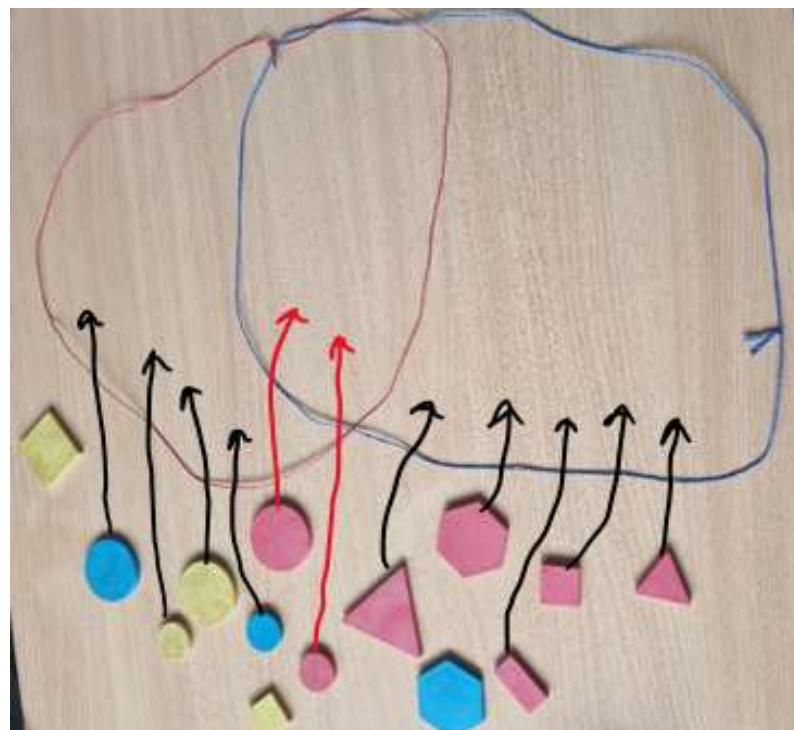
Stavi sve krugove u ogradu (ograda je konopac):



Stavi krugove u jedno dvorište a trokute u drugo:

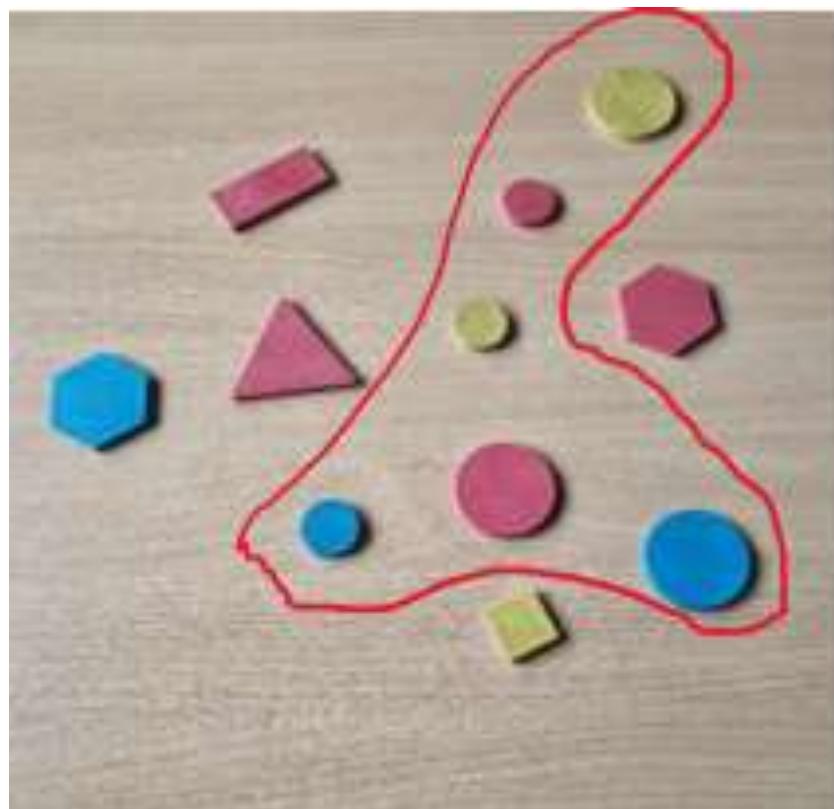


Stavi krugove u jednu ogradu a crvene predmete u drugu (Ovo je složenija situacija jer imamo predmete koji trebaju biti u obje ograde pa se trebamo dosjetiti kako postaviti ograde):



Sakupljanje možemo obaviti stavljanjem ograde (konopca) oko predmeta jer tako imamo vizualnu reprezentaciju pojma skupa. Na primjer:

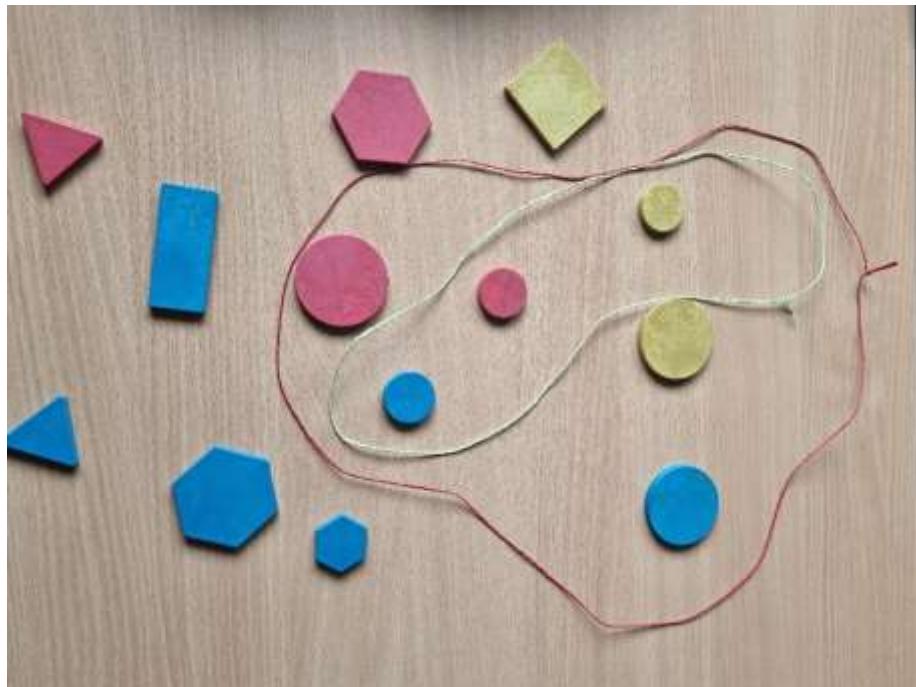
Ogradi sve krugove:



Ili: ogradi sve male likove, ogradi sve plave likove, itd.

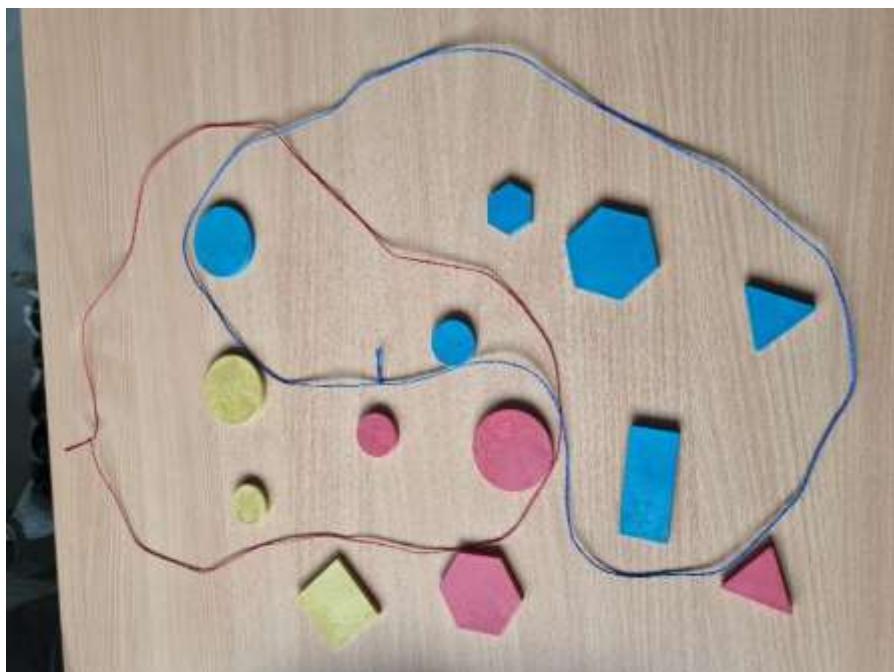
A4: Izdvajanje podskupa iz skupa. To može biti sa stvarnim predmetima ili na slici, proizvoljno ili po nekom svojstvu . Npr.: Izdvoji sve autiče (a ima i drugih predmeta) pa među autićima izdvoji sve plave.

Primjer. Ogradi sve krugove, pa između njih odvoji sve male likove:

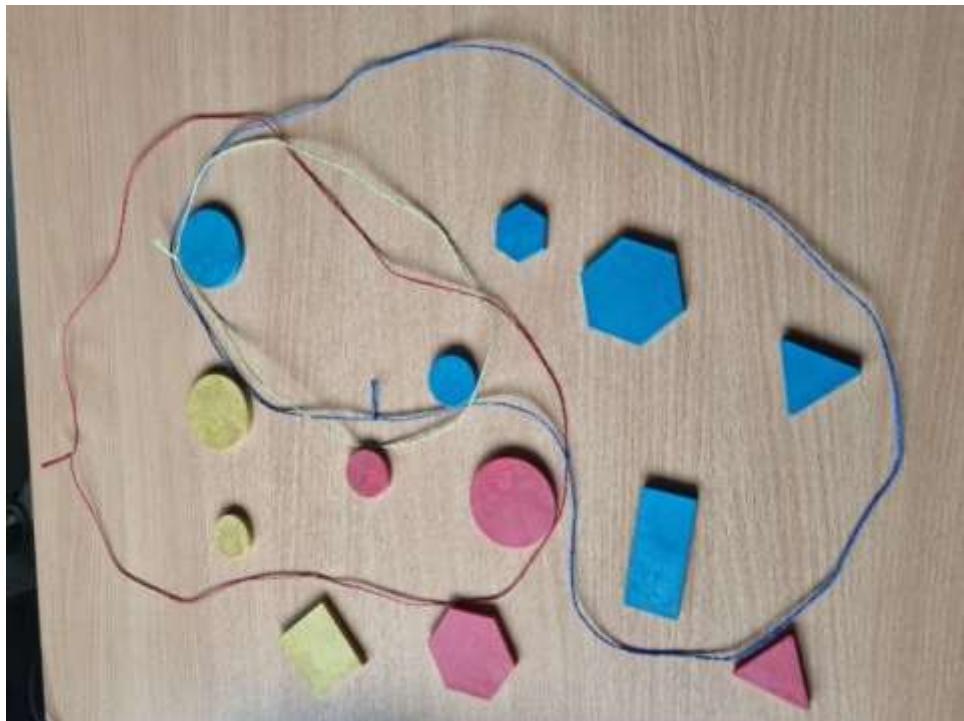


A5: Operacije sa skupovima. To se može raditi s predmetima ili na slici. Možemo imati razne hrpe ili objedinjavati predmete nekim „lasom“ oko njih.

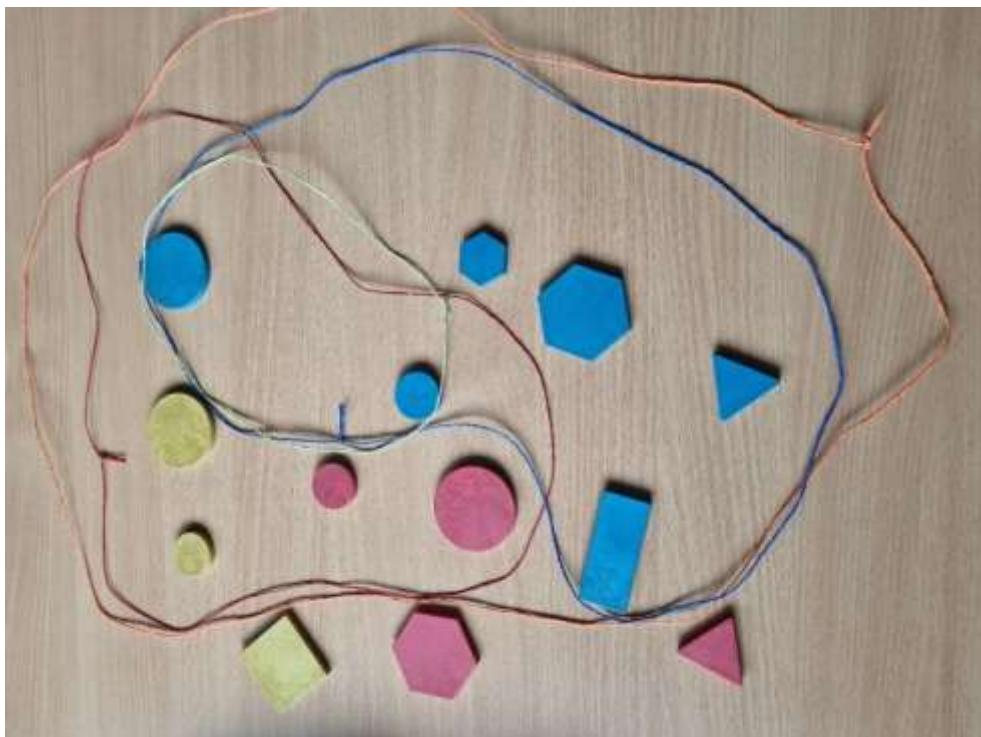
Primjer: Ogradimo sve krugove (jedan skup – crvena ograda) i ogradimo sve plave objekte (drugi skup – plava ograda):



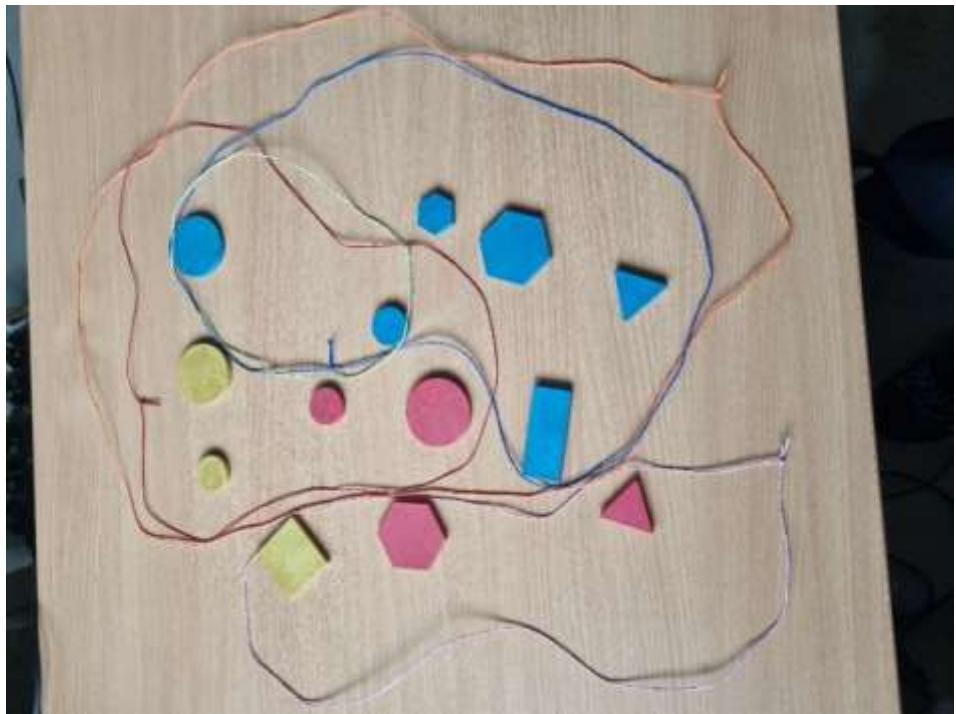
Sad ogradimo sve plave krugove (uzmememo zajedničke elemente iz oba skupa i dobijemo novi skup – njihov presjek – žuta ograda):



Pa ogradimo sve koji su krugovi ili plavi likovi (uzmememo zajedno sve elemente iz oba skupa i dobijemo novi skup - njihovu uniju – ružičasta ograda):



I ogradimo sve preostale (uzmememo elemente koji nisu u tom skupu, koji nisu ni krugovi ni plave boje, i dobijemo novi skup - komplement danog skupa – ljubičasta ograda)



Da bi se dijete motiviralo da to izdvajanje radi po nekim svojstvima, valjalo bi ukomponirati u neku priču. U Dodatak 1 je skicirana jedna takva priča.

Na web stranici <http://stern.buffalostate.edu/Movies/index.html> možete naći tri linka (*Fredereque Papy Teaching Strings in Kindergarten, Boys and Blue Strings, Venn Diagrams*) na videa na kojima Fredereque uči malu djecu skupove:³⁰

2 Relacije

Kratko objašnjenje pojma relacije se nalazi na strani 10.

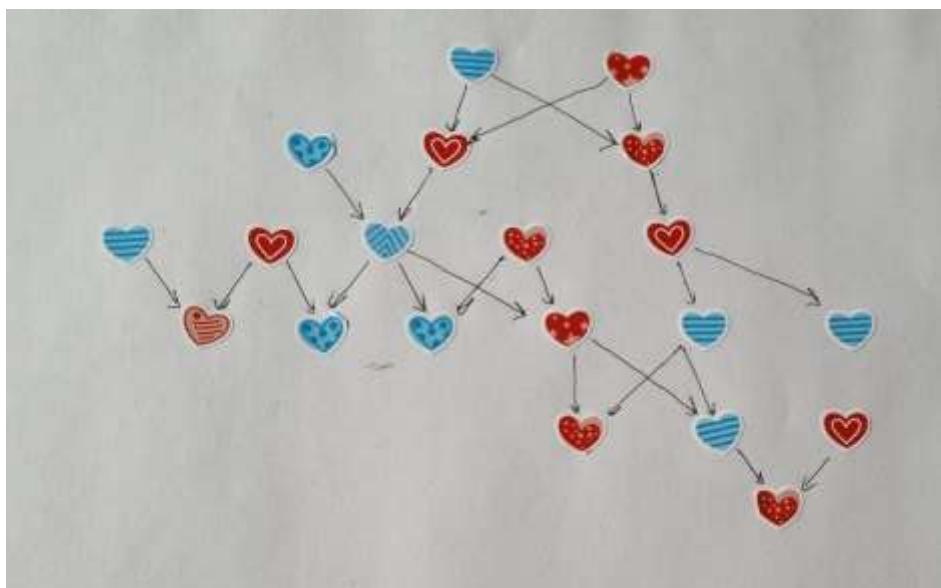
A1: Pripadnost relacija. Na primjeru relacija iz svakodnevnog djetetova života, jer te su relacije djeci bliske i rado ih analiziraju, možemo u razgovoru ili kroz igru navesti dijete da ispituje tko je a tko nije u toj relaciji, npr. je li Ana prijatelj Nini (relacija x je prijatelj y), je li Anica mama od Ivice (relacija x je mama od y), Lala je Eminina lutka (relacija x je lutka od y), Medo je u dnevnoj sobi (relacija x je u prostoriji y), Stipe je ispred Ante (x je ispred y), ... Kad god iskažemo tvrdnju o dva objekta (ljudi, lutke, mjesto u prostoru, ...) izrekli smo da su ta dva objekta u nekoj relaciji.

Možemo i ovdje razviti igru. Netko kaže neku tvrdnju o dva objekta a djeca odgovaraju sa „laž“ ili „istina“.

³⁰ Meni sad ta video izgledaju malo „strašna“, ali to je bilo doba – sedamdesete prošlog stoljeća. Sama matematika sa skupovima je super razrađena. Fredereque Papy (1921 – 2005) je bila poznata po uspješnom uvođenju moderne matematike za malu djecu u to doba.

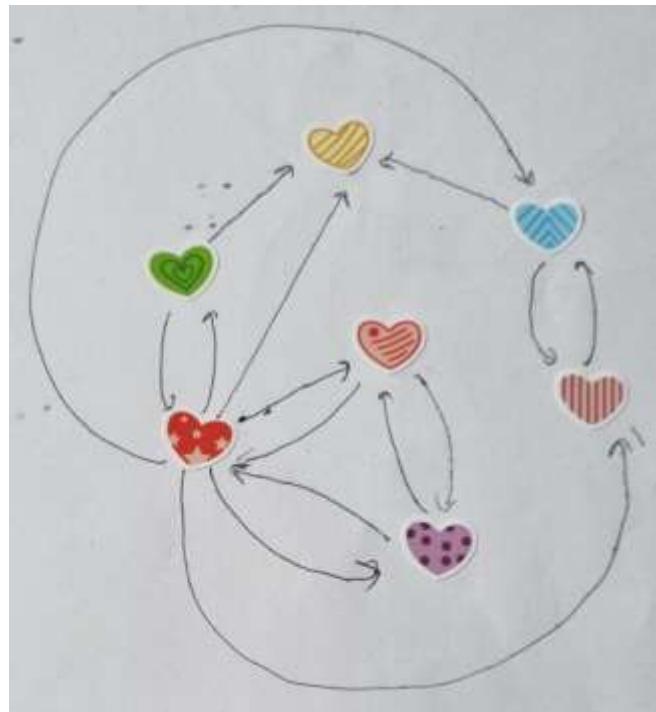
Isto tako možemo ispitivati šta se desi kad mijenjamo mjesta imena u relaciji (Ako Anica mama od Jasne može li biti Jasna mama od Anice?. Je li Anica mama od Anice? Ako je Mate predak od Ive a Janica predak od Mate je li Janica predak od Ive?)

A2: Predstavljanje relacije grafom. Relaciju koja povezuje objekte iz istog skupa vizualno možemo predstaviti grafom. Objekte predstavimo nekakvima likovima ili imenima, ako djeca znaju čitati, a kad je jedan objekt u relaciji s drugim, povučemo strelicu od jednog lika do drugog. Uzmimo na primjer relaciju *biti roditelj*. Ljude predstavimo na papiru ili ploči ili zidnom panou slikama ili nekim likovima. Za rodbinske odnose je važno da je vidljivo tko je *muško* a tko je *žensko*. To možemo npr. odrediti odgovarajućom bojom, klasično plavom za muško a crvenom za žensko. Povučemo strelicu od jednog čovjeka prema drugom i tako predstavimo da je jedan čovjek roditelj drugom. Sad imamo tzv. graf relacije. Na njemu djeca mogu svašta ispitivati, kroz neku igru ili priču. Mogu pronaći tko je mama a tko djeda, tko je baka od dane osobe, koliko neka osoba ima djece, jesu li dvoje ljudi brat i sestra itd. Možemo ih pitati je li predak pretka isto predak itd. Evo jedne takve vizualizacije (zgodnije je ljude predstavljati slikama, a ako djeca znaju čitati, još je bolje koristiti imena ljudi - ja sam imao samo stickers srca na raspolaganju)



Možemo izabrati jednu osobu na grafu i pitati da mu se pokažu roditelji, bake, djede, braća, sestre, bratići, ... itd (djeca mogu prstom pokazati tko je to). Možemo se pitati tko ima najviše djece, tko najviše sestara itd.

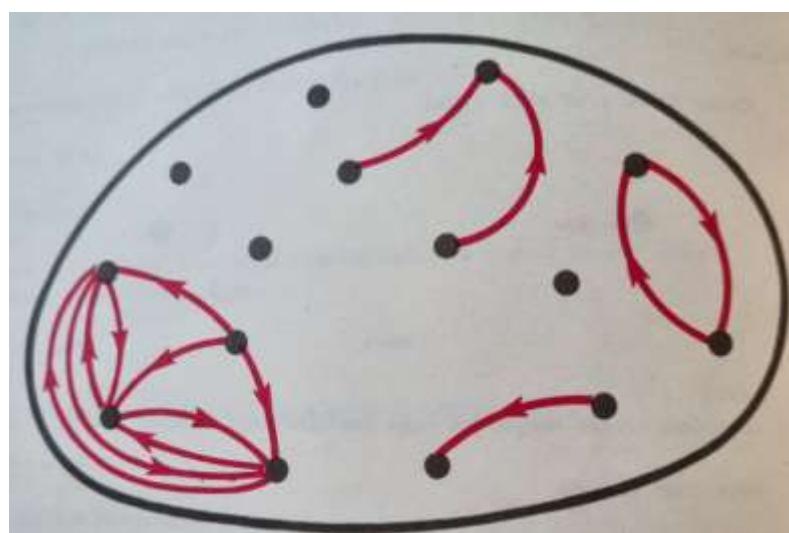
Isto možemo uraditi i sa drugim relacijama nad nekim skupom. Na primjer: *biti prijatelj*, *biti susjed*,... Evo jednog grafa koji pokazuje tko se s kim voli igrati



Sad možemo pitati ima li netko tko se sa svakim voli igrati, netko tko se s nikim neće igrati, s kim se najviše vole igrati, ima li neka grupa gdje se svatko sa svakim voli igrati itd. S koliko djece se voli igrati dijete predstavljeno crvenim srcem sa zvjezdicama, itd.

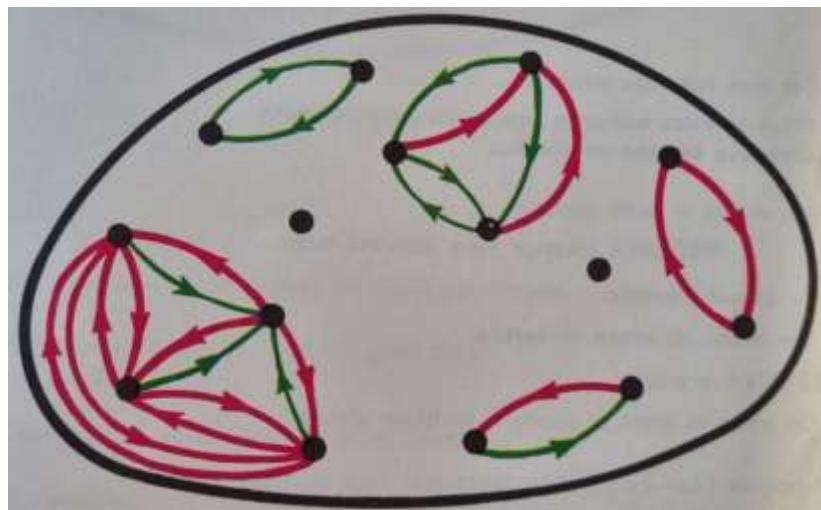
Evo i jednog ispitivanja tko je kome brat ili sestra. Ovo je preuzeto (u skraćenom obliku) zajedno sa slikama iz knjige Frederika i Papy: *Dijete i Grafovi*. Školska knjiga, 1972. Na web stranici <http://stern.buffalostate.edu/Movies/index.html> možete naći link (*Arrows You are my sister*) na video na kojem Fredereque radi s malom djecom ovu temu.

Predstavimo svako dijete točkom i povucimo crvenu strelicu od jedne točke x prema drugoj y . Tom strelicom dijete x pokazuje svoju sestru y . Recimo da smo dobili ovaj graf:



(Frederika i Papy: *Dijete i Grafovi*)

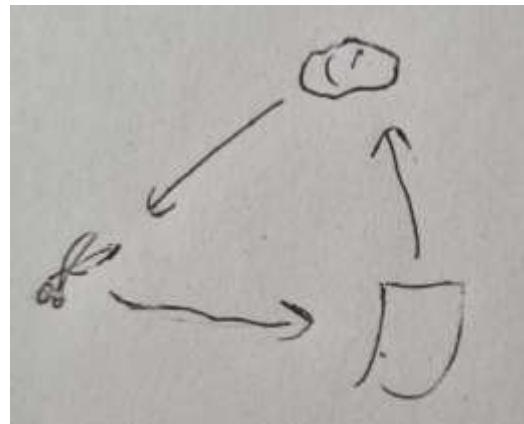
Sad možemo pomoći djeci da iz grafa izvuku mnoštvo informacija. Kao da se igramo detektiva. Pored standardnih pitanja s ovakvom reprezentacijom relacija (*Tko ima najviše sestara?*, *Tko nema sestruru?*) djeca se mogu igrati detektiva. Npr. da pronađu curicu (ako do nekog djeteta ide strelica tad je to curica). Malo teže, dečka (ako od nekog djeteta ide strelica a ne dolazi do njega tad je ono brat, odnosno dečko). Ili da pronađu dva brata (točke u gornjem dijelu crteža od kojih polaze strelice), itd. Također možemo djeci dati zadatak da nacrtaju zelene strelice kojima će djeca pokazivati svoju braću:



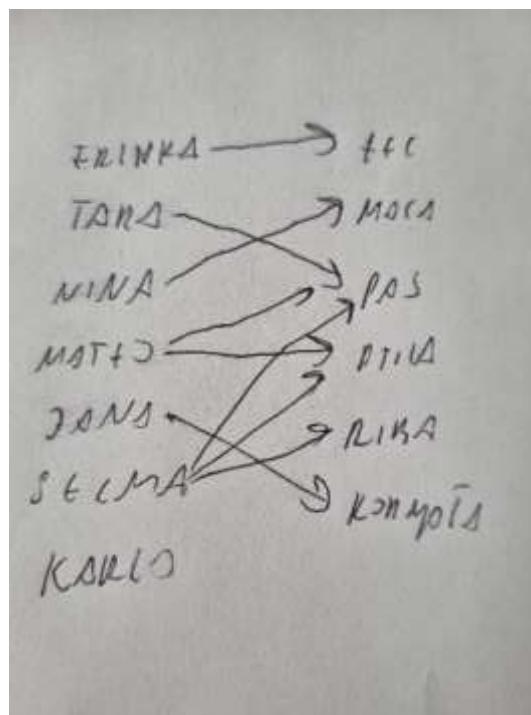
Frederika i Papy: *Dijete i Grafovi*

A3. Ispitivanje svojstava relacija. U zadavanju relacija riječima ili strelicama možemo ići i korak dalje: upućivati djecu da ispituju svojstva relacija, kao što je već naznačeno u A1. Npr. ako je x u relaciji s y je li tada y u relaciji s x (simetričnost relacije - možemo li zamijeniti mjesta objekata u relaciji: to bi trebalo npr. vrijediti za *prijateljstvo*, i za *spol*). Ili, ako je x u relaciji s y a y u relaciji sa z je li tada x u relaciji sa z (tranzitivnost relacije – to npr. vrijedi za relacije *biti predak* i *biti viši*, ali ne i za *biti prijatelj*). Ili, je li x u relaciji s x (refleksivnost relacije – npr. *sličnost trokuta* je takva relacija (svaki trokut je sličan samom sebi)). Ova igra s premještanjem riječi u rečenici, pored matematičke i jezične poučnosti, može djetetu biti zanimljiva. Npr. ako zamijenimo mjesta imenicama u rečenici *Nina voli sladoled*, dobit ćemo smiješnu rečenicu *Sladoled voli Ninu*. Isto tako od istinite rečenice *Glava je na ramenima* dobit ćemo lažne rečenice *Ramena su na glavi* (relacija nije simetrična) i *Glava je na glavi* (relacija nije refleksivna). Ako radimo sa grafovima relacija, sve se to da prikazati vizualnim odnosom strelica. Npr. simetričnost znači da svaka strelica ima „povratnu“ strelicu, a refleksivnost da od svakog objekta jedna strelica ide prema njemu.

A4: Igra kamen škare papir. Tu imamo relaciju *biti jači*, Zgodno ju je predstaviti grafom, Dijete povuče strelicu s jačeg prema slabijem. Na grafu se jasno vidi da tu nema najjačeg kao u standardnim relacijama usporedbe:



A5: Relacije među objektima iz dva skupa. Kad su u binarnoj relaciji objekti iz jednog skupa s objektima iz drugog skupa, tad je relaciju zgodno predstaviti strelicama koje idu iz jednog skupa u drugi skup. Na primjer relacija *dijete x ima kućnog ljubimca vrste y* je relacija između djece i vrste njihova kućnog ljubimca. Možemo je vizualno predstaviti na sljedeći način (mjesto imena bolje bi bile slike):



Pitanja: Koju vrstu ljubimca ima Mateo? Tko ima ptice? Tko nema kućnog ljubimca? Tko ima najviše vrsta ljubimaca? Koju vrstu djeca najviše imaju?

A6: Relacije uređaja. Takve relacije uvode neki poredak među objektima.

Linearni uređaj je kad ih sve možemo poredati u isti red: biti viši, biti dulji, biti teži. Djeca često redaju predmete po nekoj veličini i tako usvajaju ideju relacije uređaja. Može se raditi „uživo“ ili na papiru.

Ordering Size



Draw a line under the smallest.
Draw a line over the biggest.



Draw a line under the shortest.
Draw a line over the tallest.



Draw a line under the lightest.
Draw a line over the heaviest.



Draw a line under the one that is empty.
Draw a line over the



(uzeto s interneta, nepoznata mi je stranica)

Linearni uređaj je i među događajima - koji se događaj desio prije:

In the right order

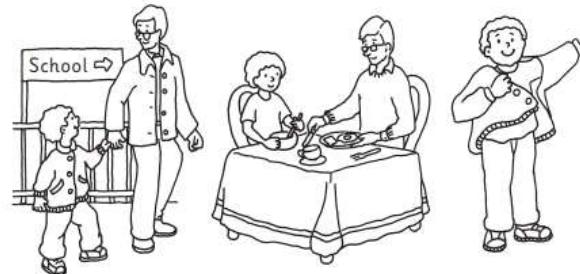


Talk about the pictures.

Write 1st, 2nd, and 3rd in the boxes.



Talk about the pictures.
Write 1st, 2nd, and 3rd in the boxes.



(uzeto s interneta, nepoznata mi je stranica)

Uređaj ne mora biti linearan. Npr. da je jedan predmet poviše drugog, odnosno drugi ispod prvog (za takve relacije koje obrću redoslijed – x je ispod y baš kad je y poviše x – kažemo da su međusobno inverzne). Tu se mogu pronaći dva predmeta takva da nijedan od njih nije poviše drugog.

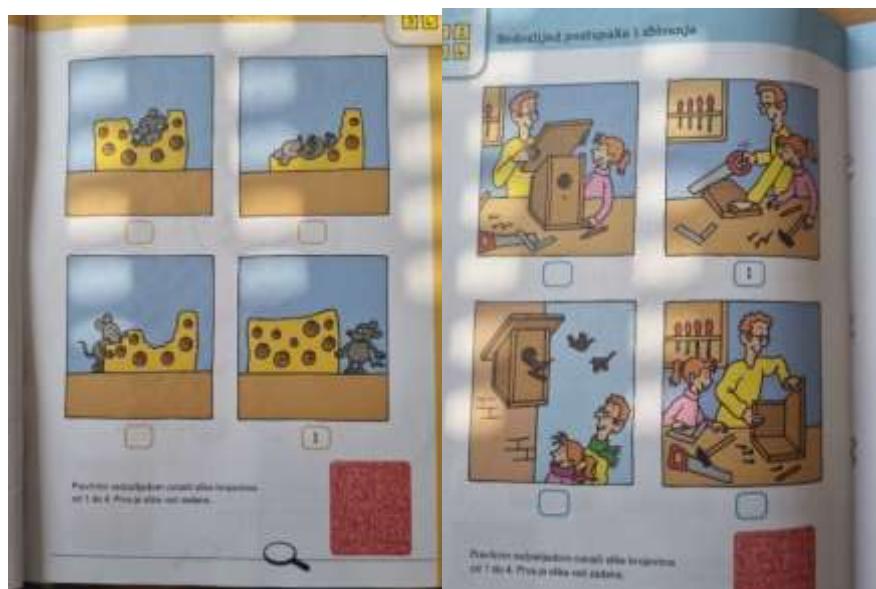


(uzeto s interneta, nepoznata mi je stranica)

Tu se možemo pitati pored pitanja tipa „je li x ispod y “ i postoji li netko tko je ispod svih, ili pak poviše svih, koliko ih je poviše nekog, koji su ispod x i ispod y , itd.

Ili npr. redoslijed oblačenja nije linearan uređaj: čarape trebamo obući prije cipela ali ne moramo cipele obući prije jakne.

A7: vremenski uređaj



(Vježbenica od 4. do 5. godine)³¹

³¹ (ova slika i slike niže istog dizajna preuzete su iz knjige *Vježbenica od 4. do 5. godine* nabavljene u Lidlu, samo stoji da je originalni izdavač Schwager und Steinlein Verlag)

A8: Relacije ekvivalencije (sličnosti). Intuitivno, to su relacije koje klasificiraju (sortiraju) objekte u grupe takve da se u istoj grupi nalaze po nečemu slični objekti. Npr. *x je jednako visok kao i y* klasificira objekte po visini. Sve objekte iste visine stavljamo u istu grupu. Obratno, uvijek kad klasificiramo objekte u neke grupe, iza toga „leži“ relacija ekvivalencije (sličnosti) – *x i y su u istoj grupi*. Npr. djeca u vrtiću su podijeljenja u vrtičke grupe. Iza toga leži relacija ekvivalencije (sličnosti) *x i y su u istoj vrtičkoj grupi*. Relacija *x i y su životinje iste vrste* sortira životinje u mace, pse, itd. Relacija *x i y su likovi istog oblika* razvrstava likove u trokute, četverokute, zvijezde, krugove,...

Djeca prirodno klasificiraju objekte po nekoj relaciji sličnosti među njima i tako usvajaju ideju relacija ekvivalentnosti.

Primjer: razvrstaj po ladicama odjeću. Gdje ćeš staviti pidžame, gdje hlače, gdje majice (u pozadini ovog razvrstavanja leži relacija sličnosti *x i y su odjeća iste vrste*).



(uzeto s interneta, nepoznata mi je stranica)



(MouseMatics)³²

A9: Relacije vezane za prebrajanje i mjerjenje. Brojanje količine predmeta, kao i mjerjenje dužine, težine, volumena, ... u svom dovršenom rezultatu daje neki broj. Međutim, ono ima i dvije kvalitativne relacije koje djeca lako mogu usvajati na ovom nivou i tako na jedan kvalitativan način mjeriti. To su relacija uređaja x je veće (*dulje, teže, ...*) od y i relacija sličnosti (ekvivalencije) x je jednako veliko (*dugo, teško, ...*) kao i y .

Aktivnost za uspoređivanje skupova dana je niže u dijelu **Funkcije**.

Uspoređivanje dužina se može uraditi ili direktno ili indirektno preko neke treće dužine. Npr. da djeca vide koji je T-rex viši mogu ih staviti jedan pored drugoga (direktno uspoređivanje). Ali da djeca vide čiji je ormarić za robu viši mogu uzeti neki konop (može i građevinski ili krojački metar – djeca vole koristiti stvari odraslih), na njemu označiti prstima dužinu visinu jednog ormarića, prenijeti konop do drugog ormarića i usporediti njegovu dužinu sa označenom dužinom na konopu (indirektno uspoređivanje).

Štapići za računanje (Cuisenaire rods) su jako dobri za uspoređivanje dužina (i poslije za usvajanje aritmetičkih operacija). Djeca mogu od njih praviti vlakove ili tornjeve i ispitivati

³² U ovom materijalu ima dosta slika koje ćete lako prepoznati po dizajnu, malom mišiću i ruskom jeziku. One su uzete iz odličnih knjiga autorice Jane Katz (ruski: Женя Кац) . Knjige možete nabaviti npr. preko Amazon.de (*MouseMatics: Unusual Math For 4 Year Olds*, *MouseMatics: Learning Math the Fun Way. Workbook of Logic Problems for children ages 5-6*, *MouseMatics: Unusual Math For 7-8 year olds*). Samo je srednja knjiga na engleskom, ostale su na ruskom jeziku. Ali ne morate znati ruski da biste ih koristili. Gotovo svugdje je na vizualnom primjeru pokazano šta treba raditi.

koji je duži (viši) i koliko oduzeti ili nadodati da budu isti. Na blogovima učitelja Simon Gregga je opisano mnoštvo aktivnosti s Cuisenaire štapićima
[\(<https://followinglearning.blogspot.com/search?q=Cuisenaire>\)](https://followinglearning.blogspot.com/search?q=Cuisenaire)



Težinu predmeta mogu uspoređivati klasičnom vagom sa krakovima, ili indirektno preko vage s utezima, ili pomoću mjerne opruge.

Volumene posuda mogu uspoređivati sipanjem vode u posude. Pijesak, sipanjem u iste posude. Volumene predmeta mogu uspoređivati tako da ih stave u iste posude s istom količinom vode i vide dokle se podigla razina vode, itd.

Djeca prirodno vole ovakve aktivnosti, tako da ih nije teško motivirati.

U taj tip usporedbe spadaju i problemi hoće li nešto stati u nešto, što djeca mogu pogodađati, pa se onda provjeri eksperimentalno. Tu spada i priča o zlatokosoj gdje joj je jedna kašica prevruća, druga prehladna a treća taman, dok joj je jedan krevet preuzak, drugi preširok a treći taman.

3 Funkcije

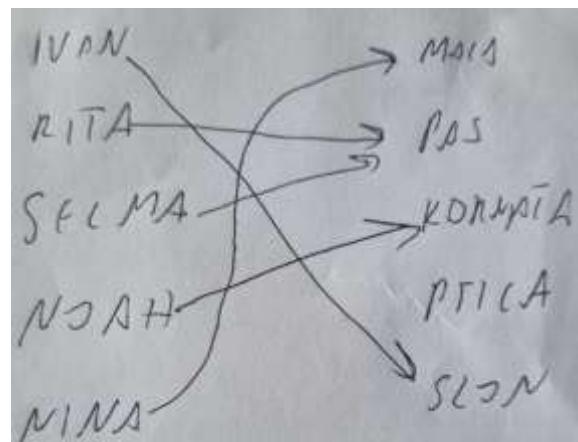
Kao kod skupova i relacija, djeci su najprirodnije aktivnosti s funkcijama iz njihovog svakodnevnog života. Da podsjetim (vidite stranu 10) funkcije (pridruživanja, operacije, preslikavanja, transformacije) primjenjene na jedan objekt jednoznačno daju drugi objekt. Npr, svakom djetetu možemo pridružiti mamu, ali ne i uho (jer to nije jednoznačno) već npr. lijevo uho. Uvijek kad identificiramo jedan objekt pomoću drugih odredili smo jednu funkciju. Npr stan u kojem živi ta i ta osoba je funkcija koja svakoj osobi pridružuje stan u kojem živi. Djeca tako grade funkcije kad po nekom pravilu jednim objektima pridružuju druga ili sami izmisle šta će čemu pridružiti, npr. svakom djetetu iz neke grupe određeni poklon. Naravno, za sve ovo treba stvoriti određeni motivacijski kontekst.

A1: Funkcije zadane jezičnim opisom. Uvijek kad identificiramo neki objekt pomoću drugih odredili smo funkciju. Obično to radimo nekim jezičnim izrazom: *mama od x, lijevo uho od x, najdraža igračka od x, najmlađi brat od x, najstarija osoba u grupi x, najdraži lik iz crtića*

djeteta x, ... Na primjer: *najteži predmet u prostoriji x* je opis jedne funkcije: svakoj prostoriji u kući (stanu) pridružujemo najteži predmet. Sad postavljamo zadatke pronalaženja takvog predmeta za pojedinu prostoriju (pojedini x), tj primjenjujemo funkciju na pojedine objekte: „nađi najteži predmet u kupaoni“, „nađi najteži predmet u ostavi“, itd. Slično aktivnosti možemo raditi i s ostalim jezičnim opisima: umjesto „x“ stavimo ime objekta (ulaz u funkciju) i nastali opis nam identificira izlaz funkcije za taj ulaz. Obratno, svaki konkretan opis jednog predmeta pomoću drugog (drugih) „krije“ u sebi jednu funkciju. Npr opis *Anin najbolji prijatelj „krije“ u sebi funkciju najbolji prijatelj djeteta x*, dok *tri plus pet* krije funkciju zbrajanja $x+y$ koja dvama brojevima pridružuje treći – njihov zbroj.

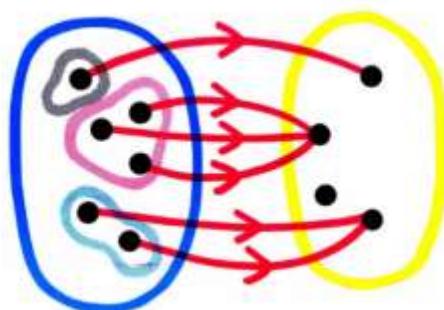
Igra: pokaži lijevo uho, desno uho, lijevog susjeda, desnog susjeda, ...

A2: funkcije zadane strelicama. Funkcije se slikovito mogu predstavljati strelicama pomoću kojih pokazujemo kojem objektu smo koji objekt pridružili, Na primjer možemo napraviti sliku na kojoj su slijeva djeca a desno životinje (niže je to predstavljeno riječima). Strelicama je prikazana funkcija koja svakom djetetu pridružuje životinju koju najviše voli.



Sad se možemo pitati: Koju životinju djeca najviše vole. Imma li neka životinja koju nijedno dijete ne voli najviše. Koliko djece najviše voli mačku, itd.

Evo još jednog primjera. Svaka je ptica odletjela u svoje gnijezdo:



(Fredereque: Dijete i Grafovi)

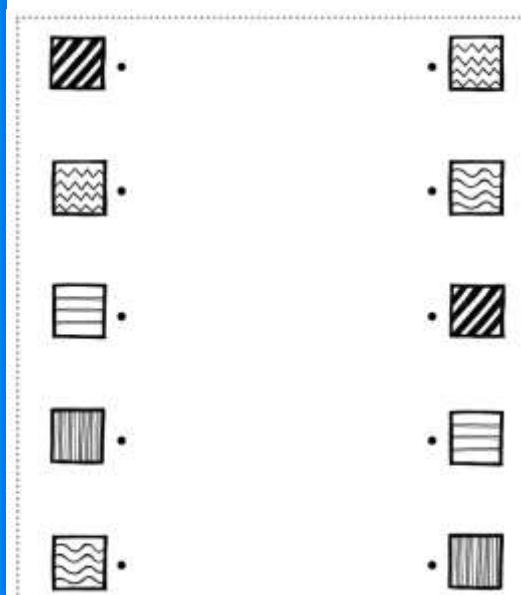
U kojem gnijezdu ima najviše ptića? Postoji li gnijezdo bez ptića?

Evo još nekih primjera:



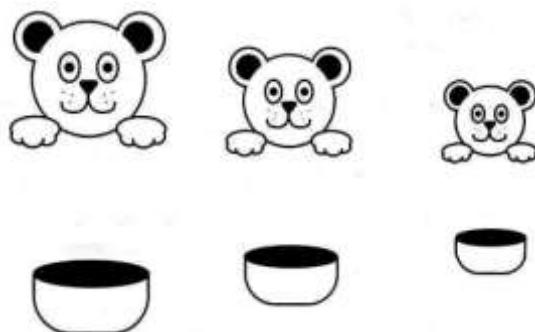
(Oštromk, Element, 2021.)

The image shows a matching activity titled "Match it". It features a grid of baby animals on the left and their corresponding parents on the right. The pairs are: Zebra (top), Worm (second row), Sheep (third row), Frog (fourth row), and Caterpillar (bottom). Each pair is connected by a dashed line.

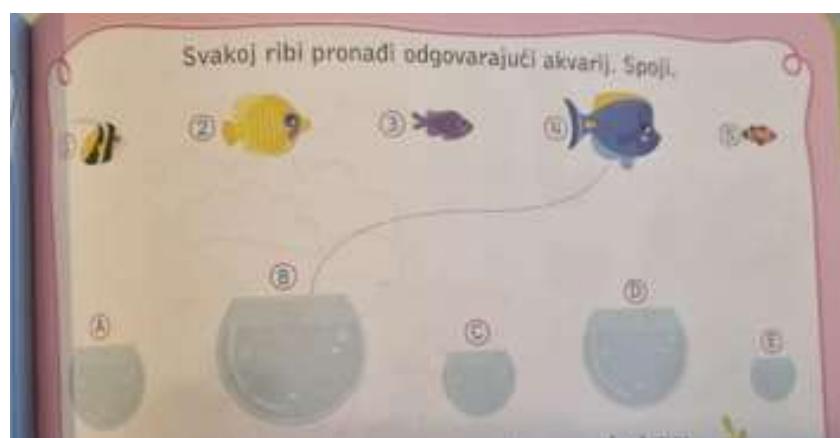


(uzeto s interneta, nepoznata mi je stranica)

Svakom psiću pridruži njegovu posudu za jelo



(uzeto s interneta, nepoznata mi je stranica)



(Oštroumke, Element, 2021.)



(Oštroumke, Element, 2021.)



(Oštroumke, Element, 2021.)

A3: funkcije zadane akcijama. Najjednostavnija aktivnosti s funkcijama su u vršenju određenih radnji da bi se od nečeg dobilo nešto drugo. Npr. od papira avion (ova funkcija svakom papiru pridružuje avion napravljen od njega), od uređivanja lutkice uređena lutkica (ova funkcija svakoj lutki pridruži konačni uređeni izgled), od kretanja u prostoru (ova funkcija početnom položaju pridruži konačan položaj).

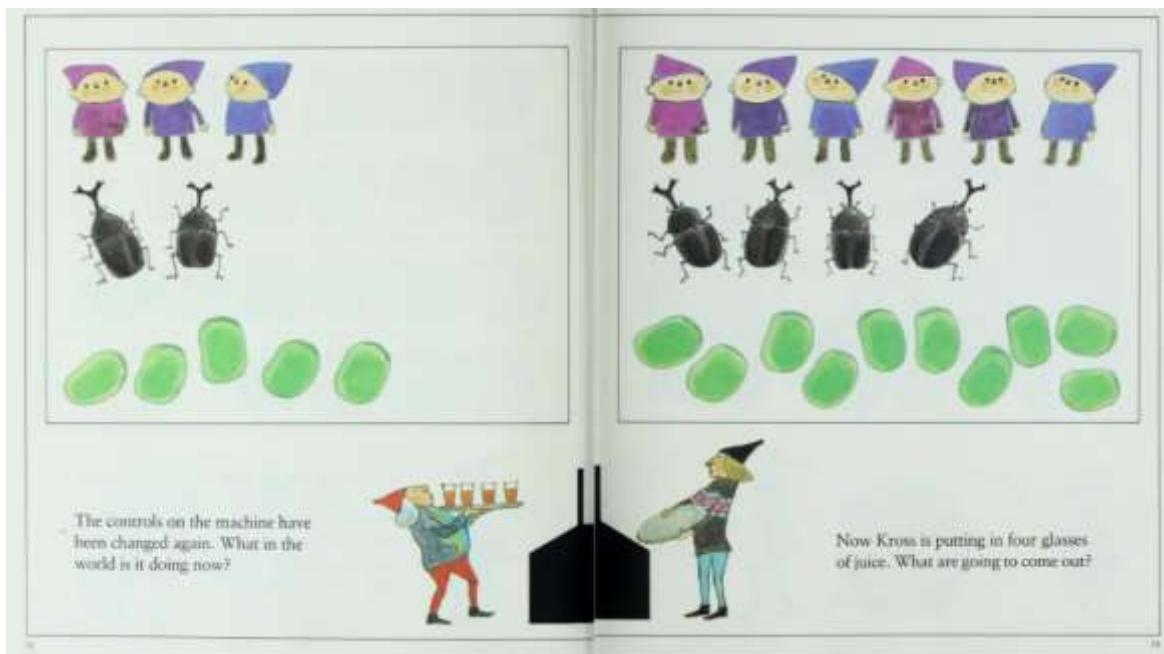
Ovo „strojno“ gledanje na funkcije može se slikovito opisati strojevima koji izvršavaju određene zadatke. Takav stroj nešto zarotira, duplifica, odraste,... npr. sljedeći stroj svako odraslo biće pretvorio u bebu:



(Mitsumasa Anno: Anno's math games II)³³

Šta radi ovaj stroj?

³³ Knjigu možete posuditi za čitanje na Internet Archive.org. Mitsumasa Anno (1926 – 2020) je napisao mnoštvo knjiga za djecu s prekrasnim toplim crtežima, od kojih neke imaju i matematički sadržaj.



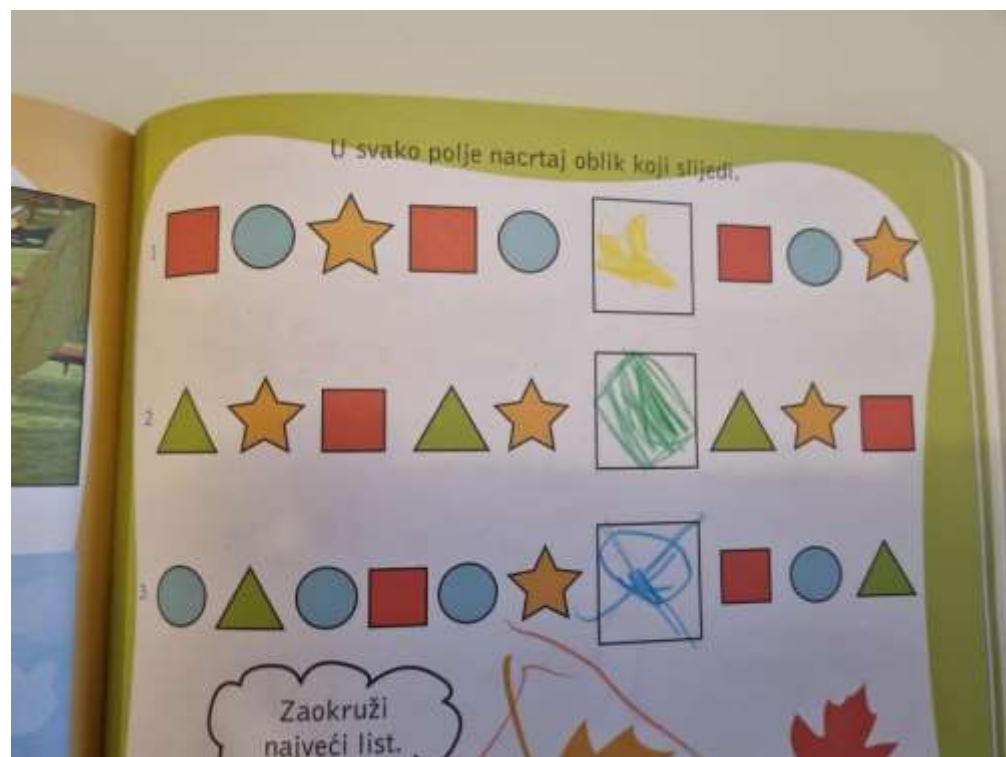
(Mitsumasa Anno: Anno's math games II)

Možemo napraviti igru. Imamo par kutija (kartonskih kućica). Svaka kutija predstavlja jednu funkciju. U svakoj kućici je jedno dijete koje izvršava tu funkciju. Kad se u kućicu preda papir s nekim likom, dijete u kućici primjeni određenu akciju na taj lik: oboji lik u žuto, prereže ga na pola, napravi još jedan takav lik, prekriži ga, napravi dvostruko veći takav lik, itd. Djeca trebaju ići od kućice do kućice i utvrditi koja akcija radi svaka kućica. Korak dalje: lik se pošalje kroz nekoliko kućica, djeca dobiju lik i moraju utvrditi kroz koje je kućice lik prošao.

A4: Funkcije zadane naredbama. Na primjer, jedno dijete glumi robota a drugo mu izdaje naredbe sljedećeg tipa: idi, stani, okreni se udesno (za 90 stupnjeva), okreni se ulijevo (za 90 stupnjeva). Koristeći ove naredbe, dijete mora robota dovesti s jednog mesta na drugo mjesto (u prostoriji, na igralištu, ...). Ovdje već imamo situaciju komponiranja funkcija. Korak dalje je izdavanje složenijih naredbi (ponavljanje dok se nešto ne napravi, pravljenje izbora) ali to je opisano u dijelu o proceduralnom razmišljanju.

A5: Nizovi. Nekoliko djece se smjeste u niz. Svaki niz zadaje jednu funkciju. Položaju u nizu pridruženo je dijete na tom mjestu. Možemo se pitati tko je treći u nizu, tko je nakon nekog, tko je prije nekog, tko je zadnji u nizu, tko u sredini. Možemo ispitivati sva moguća nizanja od npr. troje djece (možemo 6 raznih nizova napraviti)

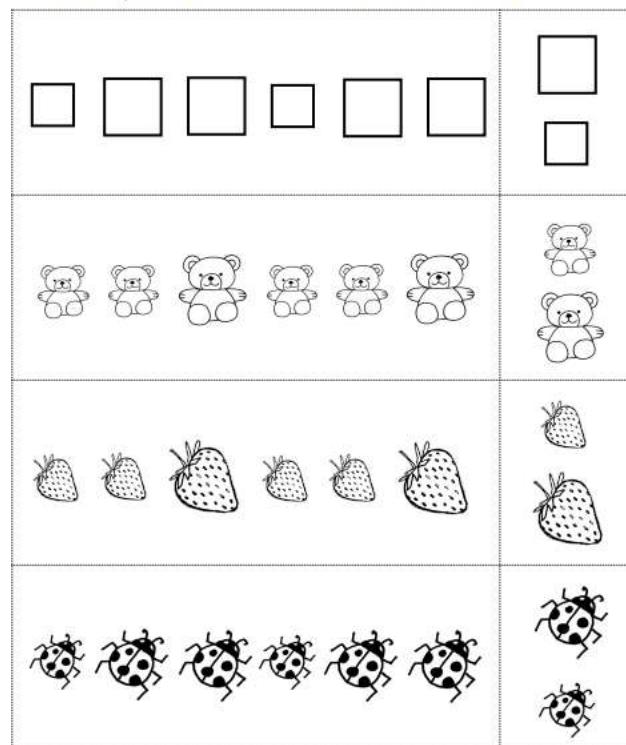
A6: Nizanje uzorka. Ono što smo prije nanizali određuje nam šta ćemo dalje staviti (kažemo da je niz rekurzivno zadan). Na internetu i u knjigama aktivnosti za djecu se može naći mnoštvo ovakvih zadataka:



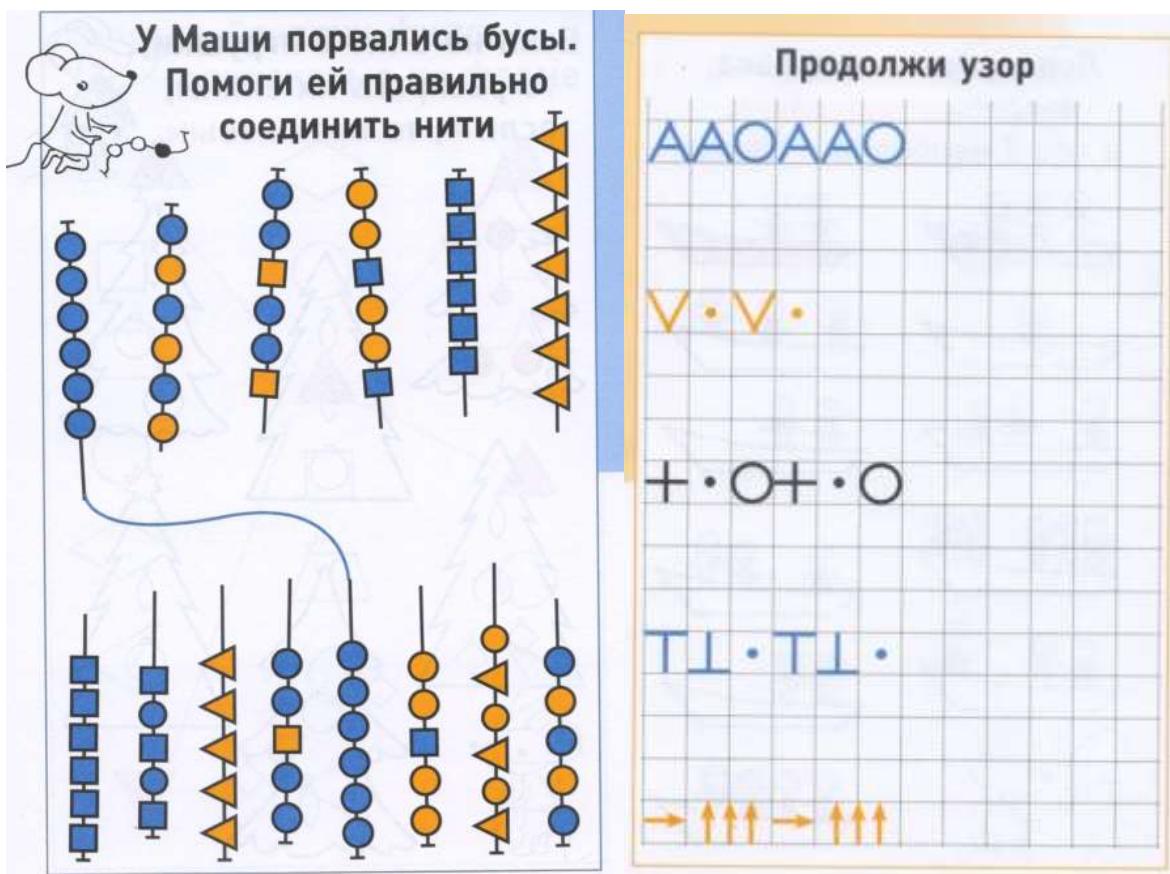
(Oštroumke, Element, 2021.)

AAB, ABB Patterns: Size

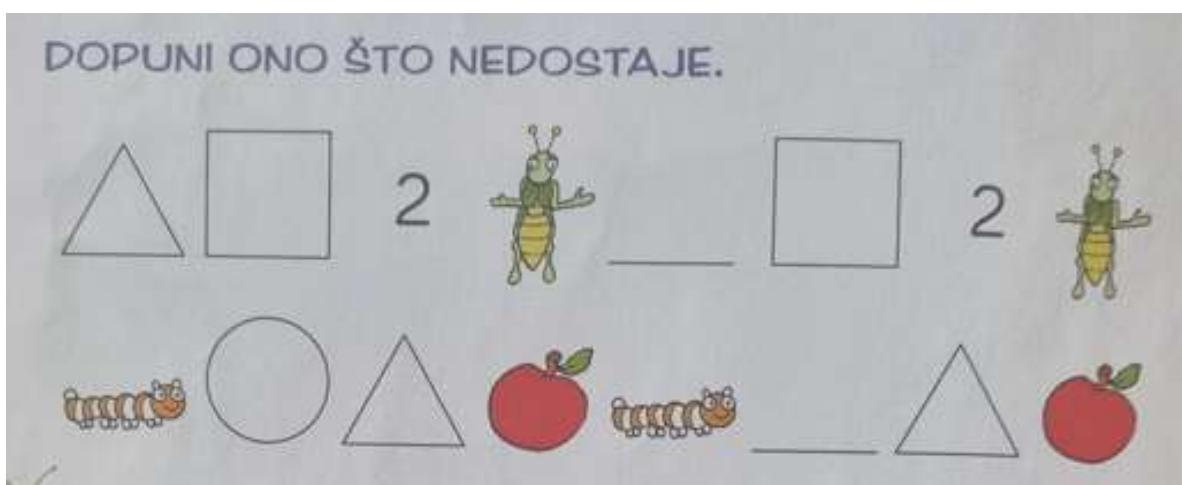
Look at the patterns. Color to show which one comes next.

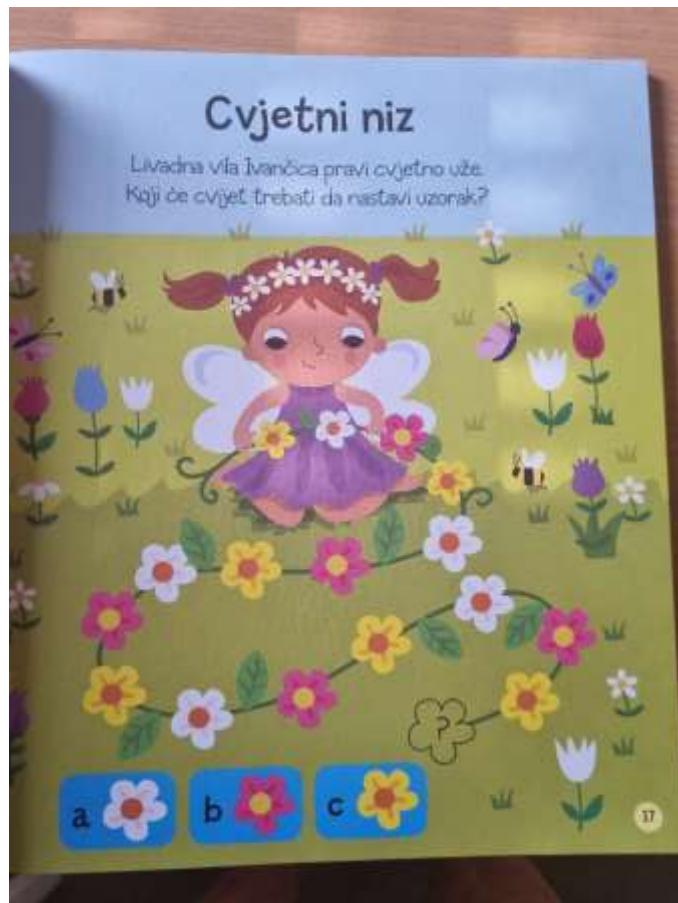


(uzeto s interneta, nepoznata mi je stranica)



(MouseMatics)

(Fora zbirka Super zadatka)³⁴³⁴ Grupa autora, izdavač Naša djeca.



(Fora zbirka Super zadataka)

A7: šifriranje. Ova aktivnost prepostavlja poznавање слова. Najједноставније се направи таблица замјене слова у тексту. На пример,

A	B	C	Č	Ć	D	DŽ	...
P	H	A	F	M	J	Ž	...

Oва таблица задаје функцију која слова пребацује у слова. Да би се текст могао дешифрирати, ова функција мора пресликавати разна слова у разна слова. Тако она има инверзну функцију дешифрирања која пребацује доњи ред слова у горњи ред.

A8: Usپoređivanje količina. Помоћу функција usпoređujemo količine, тако да елементе једног скупа (колиџине) повезујемо с елементима другог скупа (колиџине) на начин да разним елементима једне колиџине придрžујемо разне елементе друге колиџине (тзв 1-1 придрžавање). Ако су код токог 1-1 повезивања сvi елементи једног скупа повезани а у другом ih је ostalo, tad je taj drugi skup veći. Ако су svi elementi iz oba skupa tako повезани tada kažemo da skupovi imaju isto елемената.

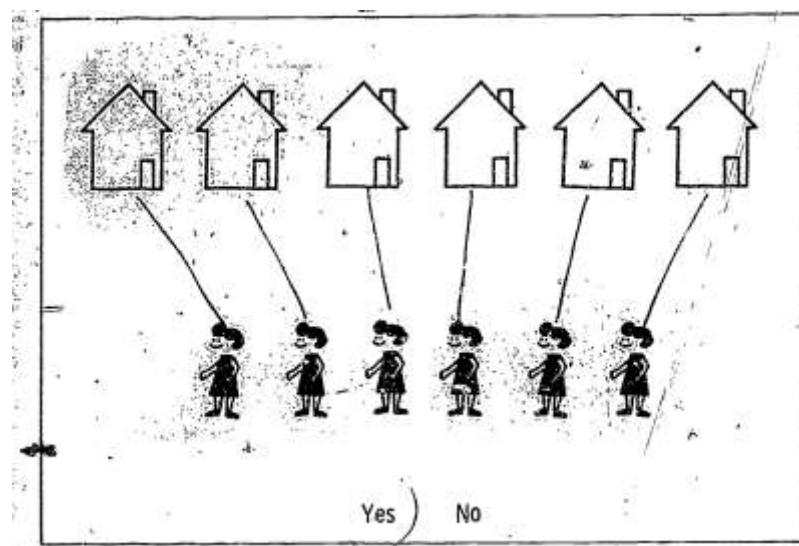
Primjer: повезивање дјече i lјuljački u parku. Дјече i лоpti за igru itd (Hoće li svako dijete imati svoju lјuljačku (loptu)?). Evo nekih primjera:



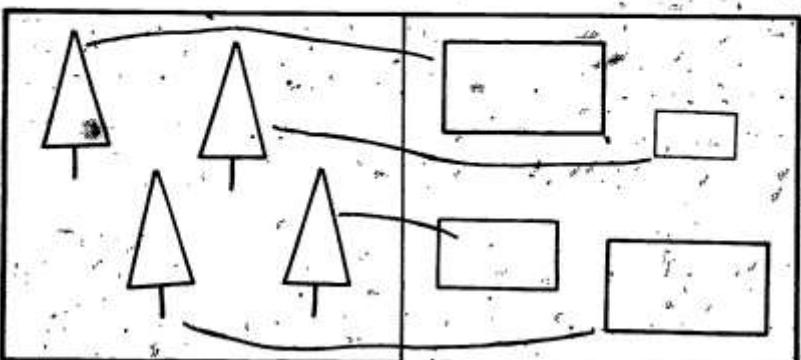
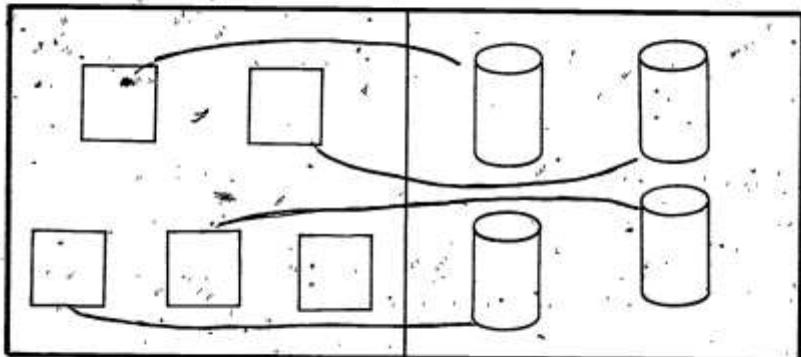
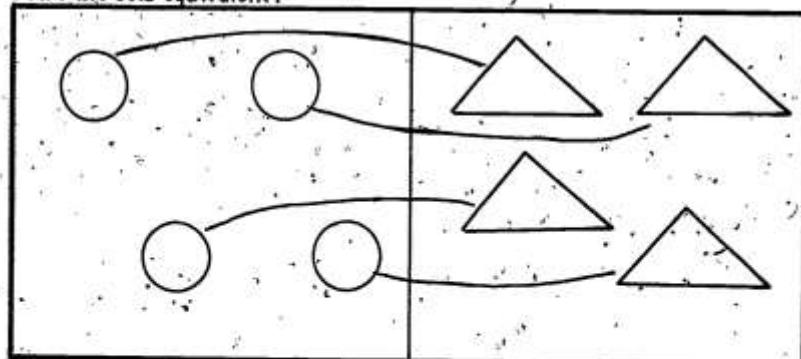
Fora zbirka Super zadataka

<p>Can each boy have a ball?</p> <p>Equal: Same number</p>	<p>Can each dog have a bowl?</p> <p>Unequal: Not the same number</p>
--	--

(uzeto s interneta, nepoznata mi je stranica)



Are the sets equivalent?



A9: Brojanje i mjerjenje. Brojanje je uspostava odgovarajuće funkcije, ali te aktivnosti će biti opisane kod brojeva. Mjerjenje je uspostava odgovarajuće funkcije: svakom čovjeku pridružujemo njegovu visinu, ali i te aktivnosti će biti opisane poslije, kod mjerjenja.

A10: Komponiranje funkcija. Funkcije možemo kombinirati: pokaži tatu od mame, mamu od mame, najmlađeg brata od mame. Ili pak, „idi dva koraka naprijed, pa tri koraka lijevo“, itd.

A11: Svojstva funkcija. Da li funkcija polazi od svakog objekta iz nekog skupa(*totalnost*), da li dolazi do svakog objekta iz nekog skupa (*surjektivnost*), preslikava li razne objekte u razne (*injektivnost*), ili se pak mogu naći različiti objekti koje preslikava u isti (nije injektivna)? Na svim prethodnim primjerima možemo uključivati i ovakva pitanja. Npr. funkcija *mama od x* je totalna funkcija na skupu ljudi (svatko ima mamu), nije surjekcija (nisu svi mame) i nije injekcija jer braco i seka imaju istu mamu.

A12. Inverzna funkcija. Da li kad idemo u obrnutom smjeru od strelica isto imamo funkciju? (tzv *inverznu funkciju*)? Vidjeli smo da je ona nužna za šifriranje. Nužan i dovoljan uvjet za to je da je funkcija injekcija. Kod streličnog prikaza se to lako vidi: ne smijemo imati dvije strelice s istim krajem. Kao npr. u prethodnom primjeru, u kojem braco i seka pokazuju na istu osobu. Kad obrnemo strelice izgubimo jednoznačnost: *dijete od x* nije funkcija jer osoba može imati više djece. Funkciju možemo dobiti tako da dodatno specificiramo povratak: na primjer *najmlađe dijete osobe x*. To je tzv. *djelomični inverz* početne funkcije *mama od x*.

Ako funkcije imaju inverz tada možemo tražiti pravila za poništavanje akcija. Npr. inverz od „idi tri koraka naprijed je „idi tri koraka nazad“. Inverz od komponiranih akcija (funkcije) obrće redoslijed njihova poništavanja, Naprimjer, inverzna akcija od „idi dva koraka naprijed, pa tri koraka lijevo“ je „idi tri koraka desno, pa dva koraka nazad“.

4 Strukture

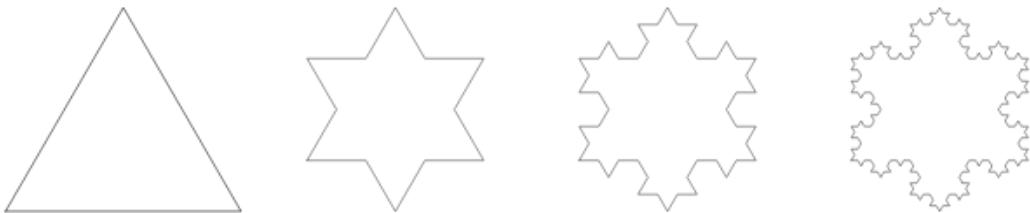
Kao što je opisano na strani 11, od skupova relacija i funkcija gradimo strukture. Uzmemo par skupova, relacija i funkcija među njima i oni , gledano zajedno, tvore jednu strukturu. Relacije i funkcije iz prethodnih sekcija smo uvijek gledali nad nekim skupovima, pa smo i tamo imali jednostavne strukture u pozadini aktivnosti.

A1 Grafovi. Sami grafovi su primjeri struktura sastavljenih od mesta i strelica koje spajaju ta mesta.

A2 Rekurzivne strukture. Izgradnja raznih konstrukcija pomoću Lego kockica je primjer tzv. rekurzivne strukture: imamo početne elemente i pravila izgradnje, pomoću kojih od početnih elemenata izgrađujemo razne konstrukcije.

Tu spada i nizanje uzoraka po odgovarajući pravilima. Npr. nacrtamo cvijet (početni objekt) i uvijek kad smo nacrtali jedan niz pogledamo zadnji objekt: nacrtamo sunce, alko je zadnji objekt cvijet, odnosno cvijet ako je zadnji objekt sunce. Tako generiramo niz: cvijet, sunce, cvijet, sunce. Naravno možemo imati drugačiji početak ili drugačije pravilo. Npr. da pravilo bude kao i prethodno ali da uvijek nacrtamo za jedan više cvjetova nego zadnji put: Tako ćemo npr. dobiti niz: cvijet, sunce, cvijet, cvijet, sunce, cvijet, cvijet,..

Na isti način možemo generirati i fraktale. Evo Kochove pahuljice. Početak je jednakostranični trokut, a u svakom koraku se stranica dobivenog trokuta zamjeni sna način kako je prikazano na slici. Djeca ovo mogu prostoručno raditi – ne mora biti precizno:



Tako se djeca upoznavaju sa veoma zanimljivim likovima – fraktalima – kojima su dijelovi na neki način slični cjelini.

A3 igre. Djeci prirodne strukture su igre. Tu imamo skup nekih objekata s pravilima što možemo s njima raditi. Osobno preferiram kooperativne igre u odnosu na kompetitivne igre, i zbog tog što djeca u tom periodu ne vole gubiti, a i zbog toga što je bolje da se uče surađivati nego takmičiti.

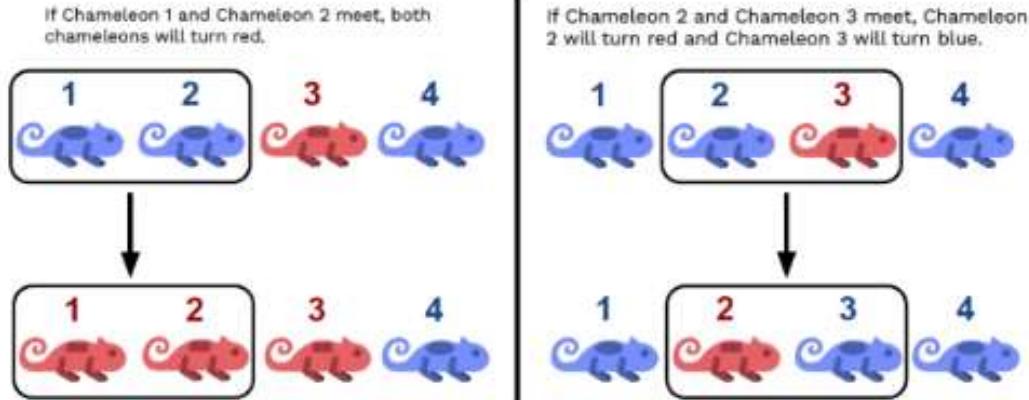
Primjeri kooperativnih igara su *Bandido*, *Max (the cat)* i *Hoot owl hoot* (utipkajte u neku tražilicu da biste saznali o tim igrama). Općenito, utipkajte u tražilicu cooperative games, pa ćete upoznati jako puno takvih igara. Zanimljiva je i igra *Human knot game*. Na linku <https://teambuilding.com/blog/human-knot> možete naći upute kao i link na video.

Grupne igre, gdje se bori tim protiv tima, su isto jako dobre, jer se unutar grupe razvija kooperativnost. Nogomet, košarka, ..., sve su to igre unutar kojih se razvija osjećaj za prostor.

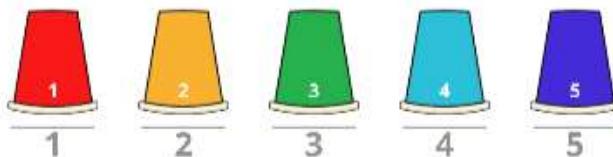
A4: Igre netakmičarskog tipa u kojima se po nekim pravilima mora postići neki cilj. Evo nekih takvih igara sa stranice <https://jrmf.org/puzzle/>.

Kameleoni: Dobije se niz plavih i crvenih kameleona i po dolje navedenim pravilima sve treba pretvoriti u crvene kameleone. Umjesto korištenja aplikacije na navedenoj stranici, može se igra realizirati s nacrtanim crvenim i plavim kameleonima.

When two chameleons meet, they both change colors, like this:



Spajanje posudica:



How to Play

Objective:

- End with all of the cups in a single stack.

Rules:

- Count the number of cups in a stack. That stack must jump that number of spaces. For example, 1 cup can only move 1 space; 2 cups have to move 2 spaces; 3 cups have to move 3 spaces...
- A cup or stack of cups cannot move into an empty space. They have to land on another cup or stack of cups.
- The game ends when no further moves are possible. If all of the cups are in a single stack, you win! If there are two or more stacks, try again!

A5: Frogs and Toads

How to Play

Objective:

- Can you help the frogs and toads get to the other side of the pond?

Rules:

There are seven rocks in a quarry with some frogs and toads on them. As you can see below, there are three frogs on the left, three toads on the right, and an empty rock in the middle.



They would like to swap positions (toads on the left and frogs on the right).



To do so, the frogs and toads take turns moving one at a time in one of two different ways. Each turn, one frog or one toad can either:

Move one space forward
onto an empty rock

OR

Jump over one other animal
onto an empty rock.



A6: Igra bliže – dalje. Sakrije se jedan predmet, dijete ga traži. Ako ide bliže predmetu kažemo *toplo* ili *bliže*, a ako ide dalje od predmeta kažemo *hladno* ili *dalje*. (usvajanje pojma udaljenosti)

Naravno, ovdje spadaju i klasične kompetitivne igre. Evo nekih.

A7: Čovječe ne ljuti se. To je igra na sreću, gdje se uče brojati i gdje usvajaju ideju slučaja, veoma bitnu matematičku ideju. Zgodno je ove igre napraviti u velikom formatu, jer su tada djeci upečatljivije. Evo mog pokušaja.



A8: Križić-kružić (tic tac toe). Jednostavna igra za usvajanje situacije kad se rade izbori između više mogućnosti s ciljem pobjede. Evo izvatka iz Wikipedie:

Križić-kružić igra se na praznom 3x3 polju na papiru. Igrač O postavlja kružiće, a igrač X križiće. Počevši od igrača s križićem, igrači naizmjenično odabiru prazna polja i unutar njih crtaju svoj znak. Igrač pobijedi kada ostvari 3 svoja znaka unatoč u nekom redu, stupcu, glavnoj ili sporednoj dijagonali. Ako to ne uspije niti jednom igraču, igra završava neriješeno.

U sljedećoj igri pobijeđuje igrač X:



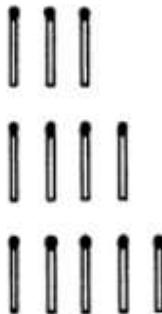
A9: Nim. Može se igrati s bilo kojim brojem redaka i objekata u retku

Nim

A Game for Two

This is one of the oldest and most enjoyable of mathematical games for two. The word *nim* probably comes from the Shakespearean word meaning to steal. Possibly it was first played in China.

Nim is played with matches or coins. In the most popular version 12 matches are placed in three rows—3 matches, 4 matches, and 5 matches, as shown.



The rules are simple. The players take turns in removing one or more matches, but they must all come from the same row. The one who takes

the last match wins. (You can also play the other way: The one to take the last match loses.)

Playing a few games will soon show you how you can always win: (a) Your move must leave two rows with more than 1 match in a row and the same number in each; (b) your move leaves 1 match in one row, 2 matches in the second row, and 3 in the third; or (c) if you play first, on your first move you take 2 matches from the top row and after that play according to the first two winning strategies just given.

You can play Nim with any number of matches or pennies in each row, and with any number of rows. As it happens, there is a way of working out how to take the right number of matches to get into a winning position. You simply use “computer counting,” or binary. This method was first given in 1901. A description of it is given in the answers section.

(nepoznat mi je izvor)

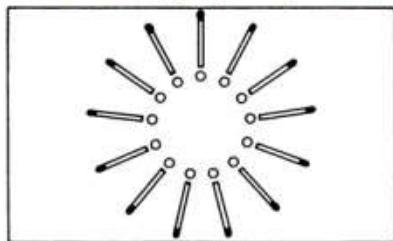
A10: latice cvijeta.

Daisy*A Game for Two*

The two players take turns to pluck from the daisy either one petal or two adjacent petals. The player taking the last petal is the winner. This is a game invented by the great puzzlist Sam Loyd.

Make a daisy with 13 petals out of matches, like this. On a postcard mark little circles where the petals (matches) grow from. You need to know whether you have left a space between petals or whether petals are next to each other. The second player can always win—if he knows how. See the answer section for this winning strategy.

Remember you cannot take two petals if there is a space between them. That's why we recommend marking the petals' positions.

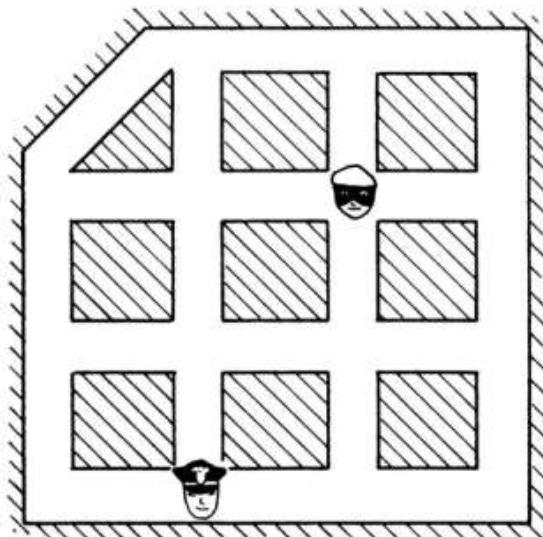


77

(nepoznat mi je izvor)

A11: policajac i lopov.**The Cop and the Robber***A Game for Two*

Here is a single-board game for two. You can play on the city plan shown here or draw a larger version for yourself.



You need two coins, one for the cop, the other for the robber. Start with each coin on its picture. The rules are simple: The cop always moves first. After that, the players take turns to move. You move a coin one block only, left or right, up or down—that is, from one corner to the next. The aim is for the cop to catch the robber, which is done by the cop landing on the robber on his move. To make the game interesting, the cop must catch the robber in 20 moves, or he loses.

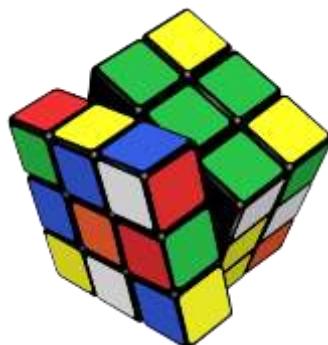
HINT: There is a way for the cop to nab the robber. The secret lies in the top left corner of the city plan.

(nepoznat mi je izvor)

A12: Šah. <https://hr.wikipedia.org/wiki/%C5%A0ah>



A13: Rubikova kocka. https://hr.wikipedia.org/wiki/Rubikova_kocka

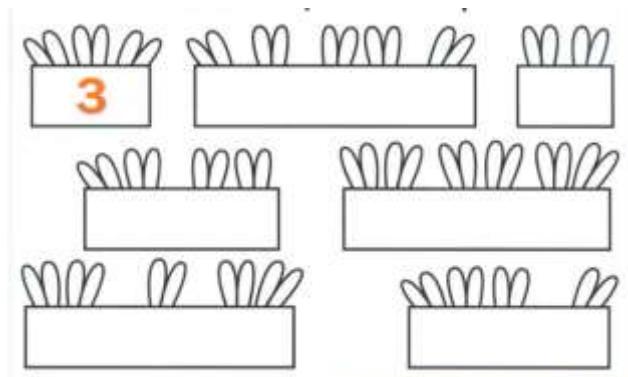


Niže je navedeno još igara vezano za pojedine matematičke elemente.

5 Brojevi

Ovdje treba paziti da se dijete previše ne optereti brojevima, odnosno da aktivnosti s brojevima ne budu djetetu previše strane. Treba izabrati aktivnosti za koje je dijete motivirano, gdje je upotreba brojeva sadržajna a ne formalna, i da ne bude preteška za dijete. Detaljnije upute su dane na strani 12.

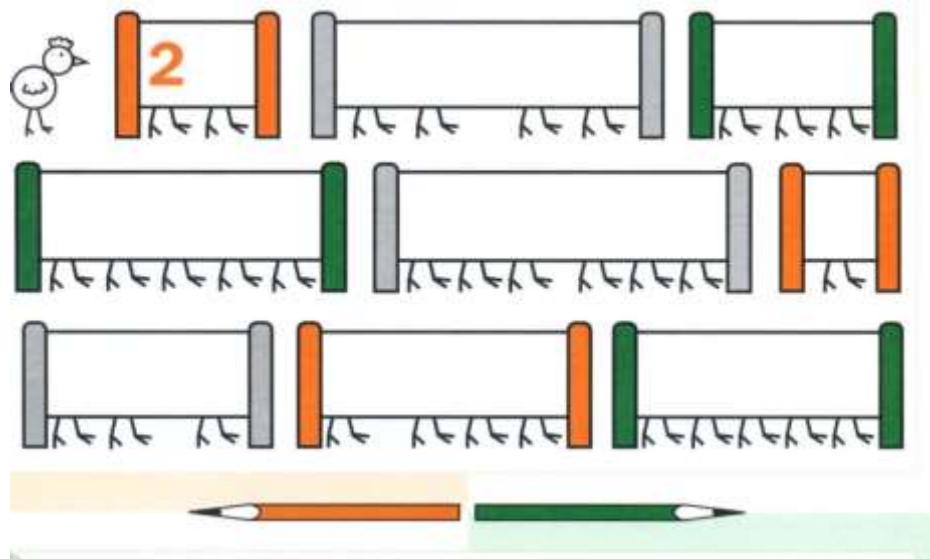
A1: brojanje količine. Prebrajanjem „izmjeriti“ koliko je velik neki skup. Evo malo zanimljivijih prebrajanja. Koliko je zečeva iza svake ograde?



(MouseMatics)

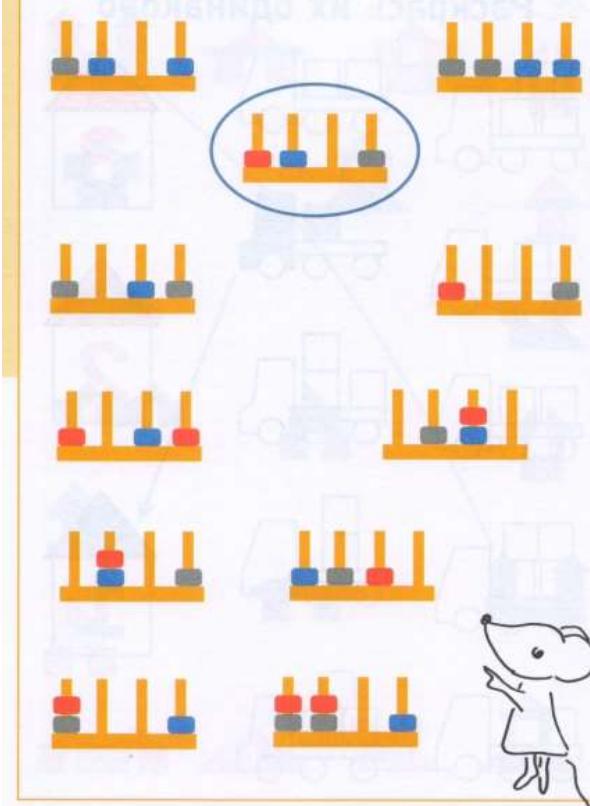
Koliko je pilića iza svake ograde?

Напиши, сколько цыплят за забором



(MouseMatics)

**Где надето 3 разных колечка?
Обведи**



(MouseMatics)

A2: usporedba brojanjem. Brojanjem usporediti čega ima više.



(uzeto s interneta, nepoznata mi je stranica)

A3: mjesto u nizu



(Oštroumke, Element, 2021.)

A4: Brojalice. Poput 10 little monkeys ili 5 little ducks: zgodno za brojanje unazad.

A5: Brojanje u pričama. Zgodno je u priču ubaciti situaciju gdje brojanje bitno utječe na radnju. U *Dodatak 2* se nalazi skica za jednu takvu priču – modifikacija priče *Vuk i sedam kozlića*

A6: Sadržajno zbrajanje. Zbrojiti dva broja koristeći šibice ili neke druge dostupne i jednostavne objekte za prebrajanje. Npr. da odredimo koliko je $7+3$, uzmememo hrpu od 7 šibica, dodamo hrpi 3 šibice i prebrojimo koliko ukupno ima šibica.

A7: Sadržajno oduzimanje. Oduzeti dva broja koristeći šibice ili neke druge dostupne i jednostavne objekte za prebrajanje. Npr. da odredimo koliko je $7-3$, uzmememo hrpu od 7 šibica, uzmemo 3 šibice sa hrpe i prebrojimo koliko je ostalo šibica.

A8: Formalno zbrajanje i oduzimanje. Ovo je naprednija aktivnost pa treba dobro odmjeriti je li dijete za to zainteresirano. Pokazat ću na primjeru $7+3$ i $7-3$. Dijete prvo treba usvojiti da je u brojanju prelazak na sljedeći broj dodavanje jedinice a prelazak na prethodni broj oduzimanje jedinice. Tako je prelazak sa 7 na 8 dodavanje jedinice, a prelazak s 7 na 6

oduzimanje jedinice. Dodati 3 znači tri puta dodati jedan, a oduzeti 3 znači tri puta oduzeti 1. Tako, da bi dijete izračunalo formalno $7+3$ treba nastaviti brojati od 7: 8, 9, 10, 11, 12, ..., i znati kad treba stati. To može ostvariti tako da istovremeno broji i od 7 i od 1, tako da izgovara: 7 i 1 je 8, i 2 je 9 i 3 je 10. Isto je i za oduzimanje: 7 manje 1 je 6, manje 2 je 5, manje 3 je 4.

A9: Šijavica. <https://hr.wikipedia.org/wiki/%C5%A0ijavica>

Šijavica (šije-šete, šijanje, u Italiji: mora, mura) je stara igra za dva igrača. Igrači istovremeno pokazuju ispružene prste jedne šake i pokušavaju pogoditi zbroj pokazanih prstiju, istovremeno izvikujući broj u rasponu od 2 do 10. Izvikuju se modificirani talijanski brojevi "šije", "šete" (sei, sette), te od njih potječe naziv igre. Iako igra ima elemente sreće, do izražaja dolazi vještina igrača.

A10: Cuisenaire rods. https://en.wikipedia.org/wiki/Cuisenaire_rods/. Na blogovima učitelja Simon Gregga je opisano mnoštvo aktivnosti s Cuisenaire štapićima: (<https://followinglearning.blogspot.com/search?q=Cuisenaire>)



A11: Sačuvanje ukupnog broja. Pokaže se određen broj predmeta. Jedan dio se sakrije. Prebrajanjem početnog broja predmeta i konačnog broja predmeta treba odrediti koliko je predmeta sakriveno (oduzimanje)

A12: uočavanje razlike brojanjem



(Fora zbirka zadataka)

A13: Mjerenje brojanjem. Napravimo od papira malog crvića. Puzajući po olovci on prebroji koliko je olovka velika, puzajući po žlici, koliko je žlica velika itd. Na *Internet Archive* možete čitati i djeci prepričati prekrasnu priču o crviću koji mjeri – Lionni: *Inch by Inch*.

A14: gladometar. Gladometar se sastoji recimo od 10 plazma keksa poredanih jedan uz drugog. Došlo je gladno dijete i pojelo nešto keksa. Pomoću konačnog stanja gladometra možemo izmjeriti koliko je keksa pojedeno (dodamo kekse do punog gladometra).

A15: Brojanje do grmljavine. Ovo je dobar primjer upotrebe brojanja. Kad vidimo munju, počnemo brojati normalnim tempom, ili se malo uvježbamo tako da jedan broj izgovorimo u jednoj sekundi. Brojimo dok ne čujemo grom. Ako smo došli do broja 6, to znači da je prošlo otprilike 6 sekundi. Zvuku je potrebno otprilike 3 sekunde da prijeđe kilometra. Tako možemo odrediti da je munja bila udaljena dva kilometra od nas. „Brojeći“ ostale munje možemo procijeniti da li nam se približava ili udaljava nevrijeme. Svoju unučicu Ninu sam naučio da ako do grmljavine izbroji manje od 5 (udaljenost od otprilike 1.6 km) da mora odmah ići kući.

A16: brojanje unaprijed i unazad. Idemo po popločanoj cesti. Ako ne ugazimo na rub ploče dodajemo 1 a ako ugazimo, oduzimamo 1. Ovdje se prirodno može pojaviti situacija da „padnemo“ ispod nule, pa se tako djeca mogu motivirati za negativne brojeve.

A17: Kuhanje. Priprema hrane po nekom receptu je idealan kontekst za brojanje i mjerjenje.

■ STEP 1

Put small piles of MKit Squares and MKit Pawns in front of your child. Have your child sort the squares and pawns by color.

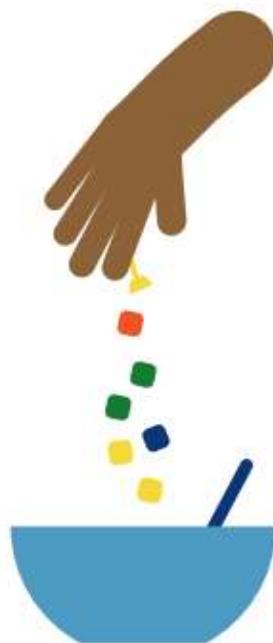
■ STEP 2

Tell your child that that you are going to bake an MKit cake and that you need help. Tell your child to pretend that:

-  is an egg
-  is 1 cup of sugar
-  is 1 cup of flour
-  is 1 teaspoon of baking powder
-  is a salt shaker

■ STEP 3

Get a bowl, a cup, or any other container that your child can put the “ingredients” in. Tell your child that the recipe calls for 2 eggs and ask your child to put the “egg squares” in a bowl. The recipe needs 1 cup of sugar, 2 cups of flour, a teaspoon of baking powder, and a shake of salt. Ask your child to put the ingredients in the container and stir them into “cake batter.”



(izvor mi je nepoznat)

A18: Ideja aproksimacije. Pokušavamo od oka pogoditi koliko nečeg ima.

A19: Ideja brzine promjene. Procjenjujemo je li nešto brže ili sporije od nečeg drugog (npr. automobili na cesti)

A20: Ideja ovisnosti. Na najosnovnijem kvalitativnom nivou, dijete možemo poticati da uočava da li se jedna veličina povećava ili smanjuje u ovisnosti o povećanju ili smanjivanju druge veličine. Npr. visina zvuka kad lupnemo žlicom po čaši u ovisnosti od količine vode u čaši.

A21: Množenje i dijeljenje. Ovo je dobar primjer gdje se prirodno pojavi potreba za množenjem i dijeljenjem, kao što se meni dogodilo s Ninom, kad je tražila da joj pomognem da napravimo 4 autića od kartona.

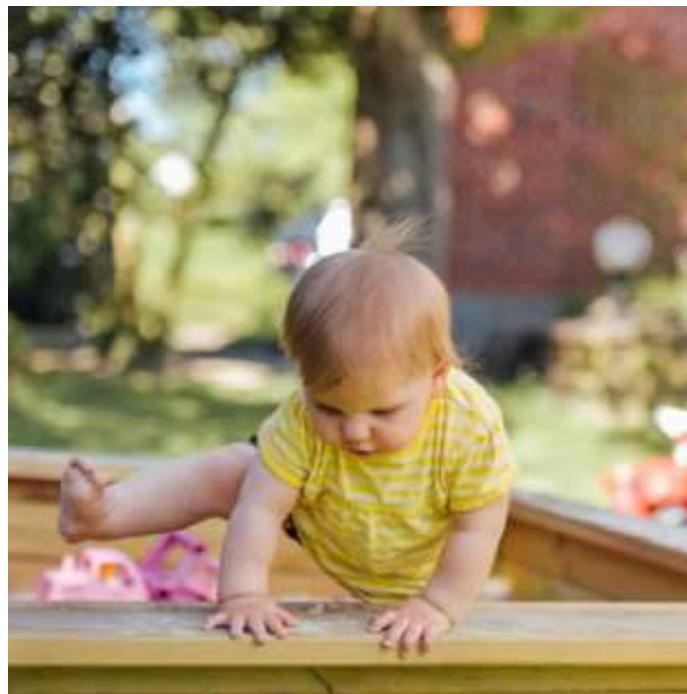


Pitala me je koliko čepova da donesem. Rekao sam joj četri puta po četri čepa, i ona ih je toliko donijela. Pitao sam je koliko je to četri puta četri, ona je prebrojala čepove i rekla 16. Onda me je pitala koliko treba čačkalica. Rekao sam joj upola manje od čepova – neka za svaka dva čepa uzme jednu čačkalicu. Kad je sakupila čačkalice pitao sam je koliko je pola od 16. Prebrojala je čačkalice i rekla 8. U za dijete važnom kontekstu, ono prirodno razvija matematiku koja se pojavi u tom kontekstu.

6 Geometrija

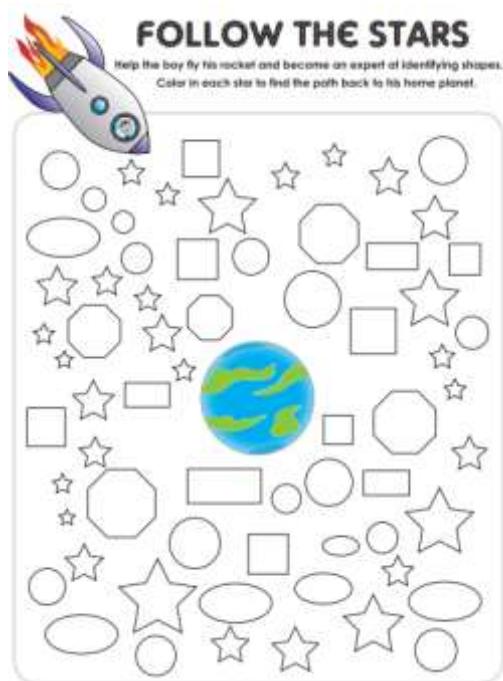
O geometriji u dječjem svijetu može se ukratko pročitati na strani 14.

A1: Kretanje u prostoru. Osnovno je kretanje i igranje u sigurnom prostoru i sudjelovanje u prostornim aktivnostima odraslih.



(uzeto s <https://earlymaths.org/>)

A2: Simulacija kretanja na crtežima. Raketa, putujući od zvjezdice do zvjezdice, mora doći do naše planete Zemlje:



(izvor mi je nepoznat)

A3: Kretanje u prostoru s preprekama. Napraviti poligon ili naći teren u prirodi za takvo nešto.



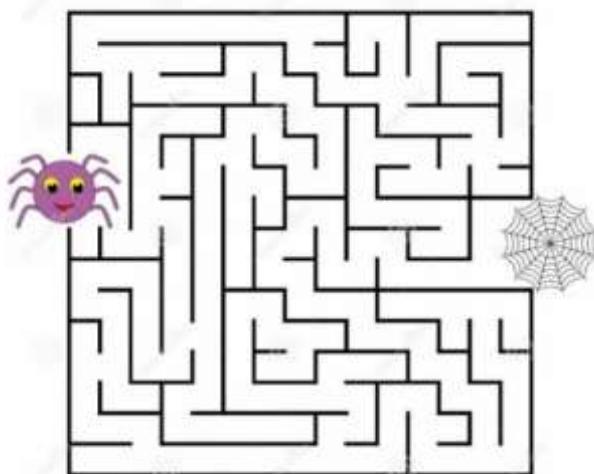
(uzeto s <https://earlymaths.org/>)

A4: Igra skrivača

A5: Labirinti

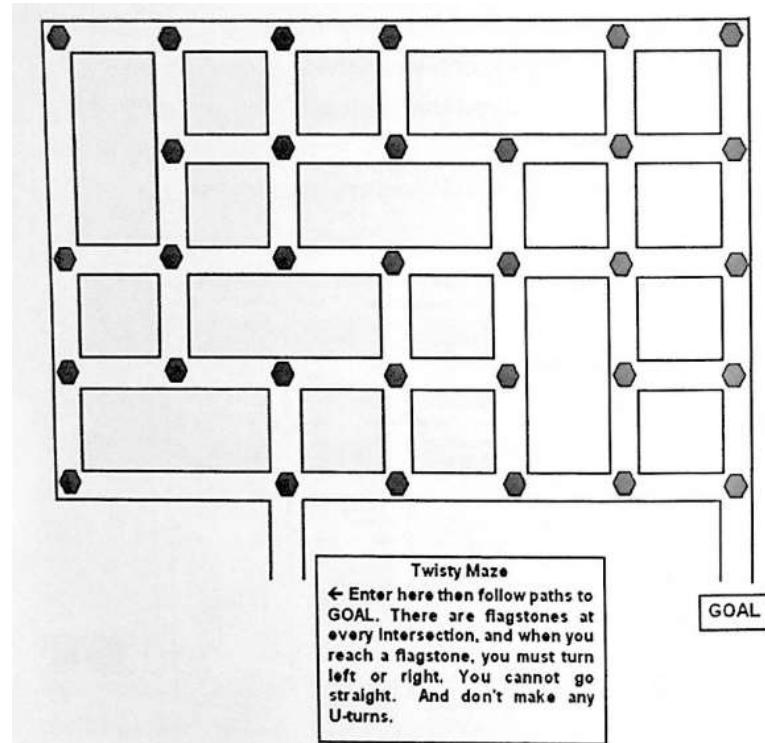
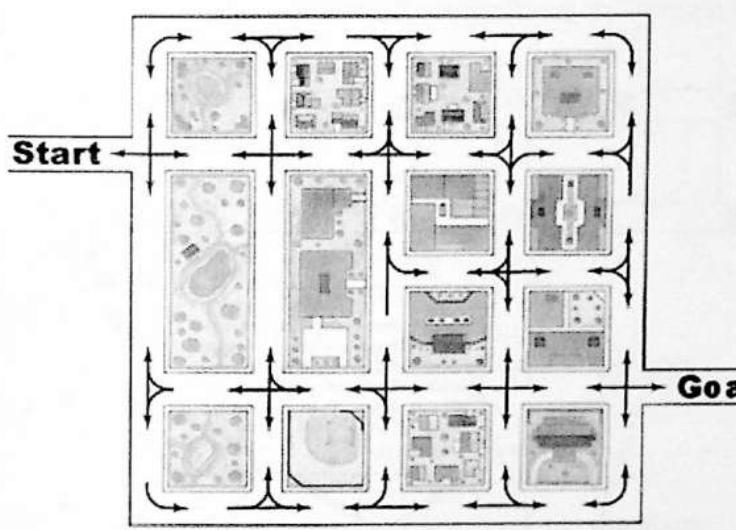


(MouseMatics)

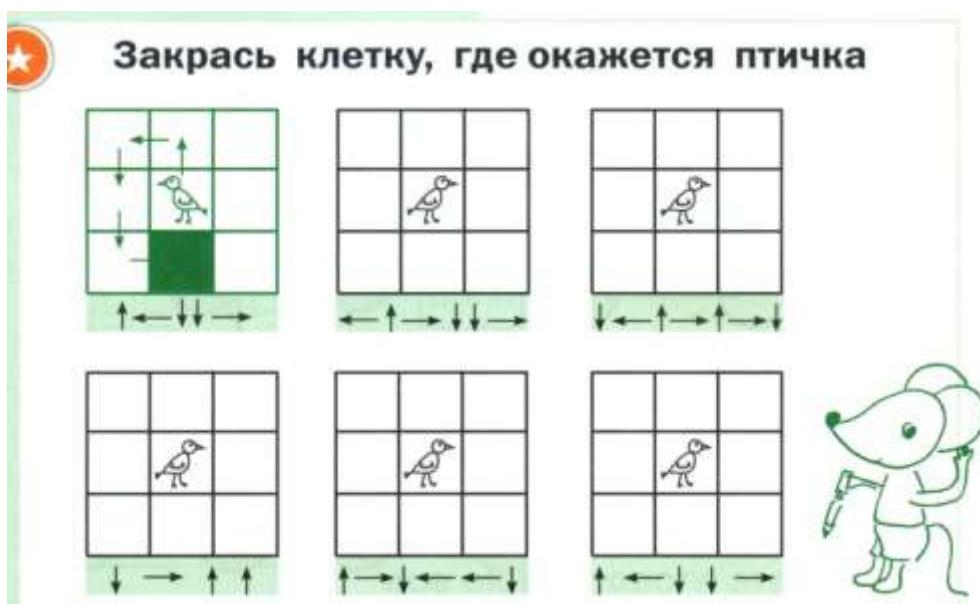


Evo nešto složenijih primjera

Travel along the roads from Start to Goal. At each intersection follow one of the arrows. That is, you can turn in a certain direction only when there is a curved line in that direction, and you can go straight only when there is a straight line. You can leave an intersection only at the head of an arrow. U-turns are not allowed.



Još ih možete naći na stranici <http://www.logicmazes.com/>

A6: Smjerovi.

(MouseMatics)

A7: Češkanje leđa. Gore , dolje , lijevo, desno.

A8: Igra s robotom. koji ima naredbe idi naprijed, idi nazad, (polu)okret ulijevo, (polu)okret udesno, stop. Može se ubaciti i koliko koraka ide. Pomoću tih naredbi robot treba stići na neko mjesto.

A9: udaljenost

Procjenjivati koji položaji u prostoru su udaljeniji, pa koracima izmjeriti.

A10: Rotiranje

Mijenjati smjerove u prostoru i procjenjivati kad smo se više a kad manje rotirali i na koju stranu smo se vrtili (djeca se vole vrtiti).

A11: Wolfs and sheeps. Treba rasporediti zadani broj ovaca i vukova na zadanu mrežu tako da su sve ovce sigurne**How to Play****Objective:**

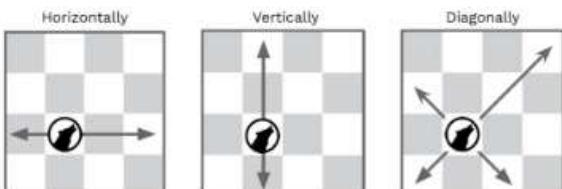
- Keep your sheep safe from the wolves.



Wolves eat sheep that are any number of squares away:

Rules:

- All sheep must be safe from wolves.
- Wolves will eat any sheep that they see horizontally, vertically, or diagonally.



(izvor mi je nepoznat)

Rješenje:



(Nina riješila)

A12 prostorni odnosi



(Oštromké, Element, 2021.)

A13: Igra sa smjerovima: Maslačci. (iz knjige Ben Orlin: *Math Games with Bad Drawings*)

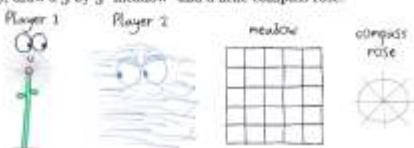
DANDELIONS

A GAME OF SPACE, TIME, AND OTHER SUCH FLUFF

I know your dreams, my friend. You wish to be a dandelion, riding the winds, a sentient piece of fluff borne across the fields of—
No, wait, I'm sorry. Misread that dream. You wish to be the wind itself, sweeping the fluff from the dandelions and carrying it—
No, wait. I see now. You want to be... both?
Aha! I have just the game for you.

HOW TO PLAY

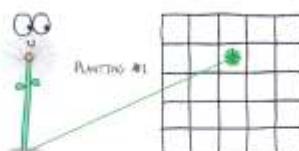
What do you need? Paper, pen, and two players: the dandelions and the wind.
To set up, draw a 5-by-5 "meadow" and a little compass rose.



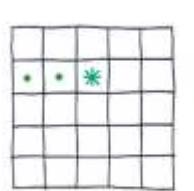
What's the goal? The dandelions aim to **cover the whole meadow**. The wind aims to leave at least one square of the meadow uncovered.

What are the rules?

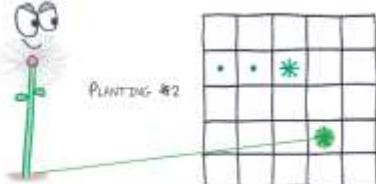
1. The dandelions move first, by **placing a flower** (i.e., an asterisk) anywhere on the grid.



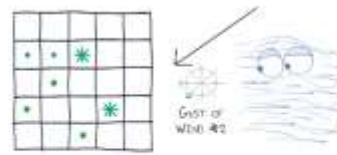
2. The wind moves next, **choosing a direction in which to blow a gust that carries the dandelions' seeds**. Any vacant square downwind of a dandelion is now occupied by a seed (i.e., a dot). During the game, the wind may blow **only once in each direction**, so after a direction is used, mark it off on the compass rose.



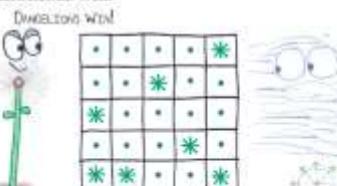
3. Continue taking turns. A **dandelion is planted** (either in an empty square, or on top of an existing seed)...



... and then the wind blows in a new direction, **carrying the seeds of all dandelions on the board**, and planting them in downwind squares. Note that seeds emerge from all dandelions present, but not from other seeds.

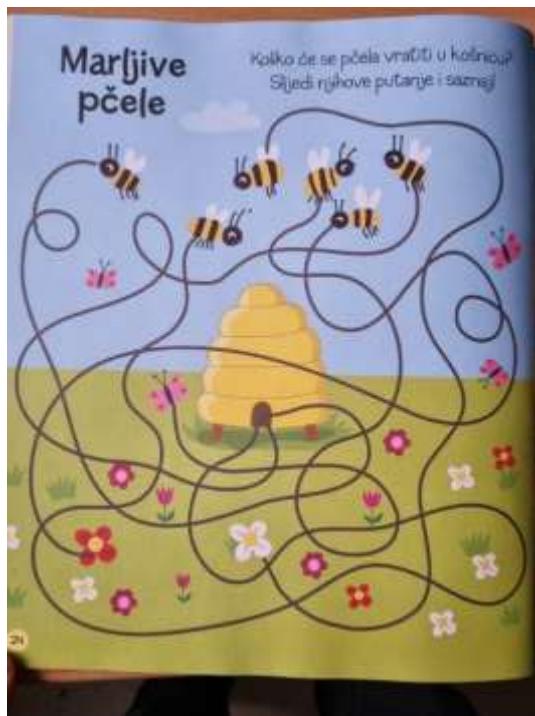


4. The game ends after seven turns, when the wind has blown in every direction except one. If the dandelions and their seeds **cover the whole board**, then the dandelions win.



If any blank squares remain, then the wind wins.

A14: Praćenje linija



(Fora zbirka zadataka)

A15: Povlačenje pravaca, linija i strelica

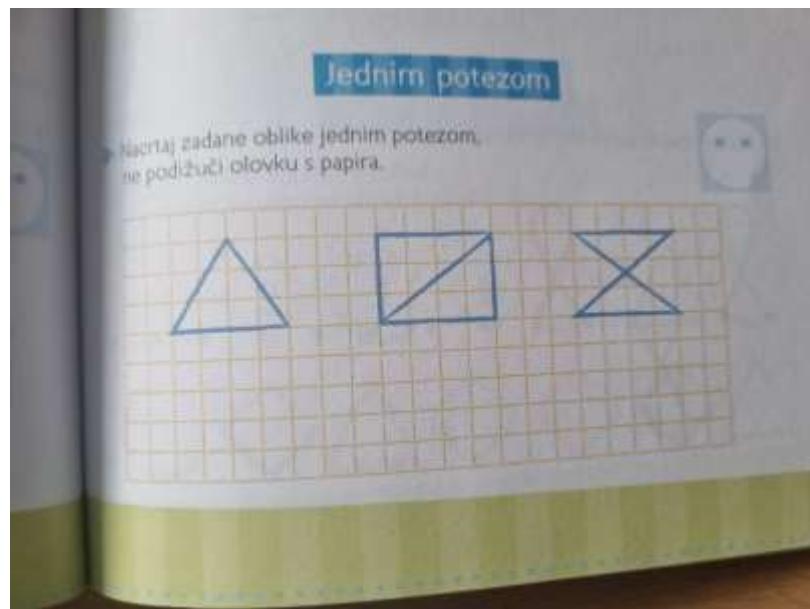
Na papiru, povlačenje u pijesku, mogu i strelice.

A16 Spajanje dvije točke

Između dvije točke povuci ravnu liniju, izlomljenu liniju, zakrvljenu liniju. Koja je najkraća. Postoji li najduža linija? Uočiti da su ravne linije najkraće spojnice.

A17: Eulerove šetnje

Krećemo s jednog mesta i ne podižući olovku svaku crtu prođemo točno jednom i vratimo se na početak (to nije uvijek moguće – moguće je baš kad se na svakom „raskršću“ sastaje paran broj puteva).



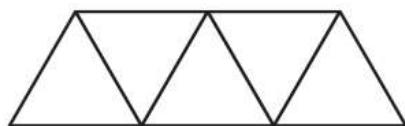
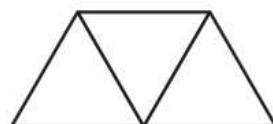
(Dejić: Matematika kao igra)³⁵

Malo drugačiji zadatak – ne moramo se vratiti u istu točku.

Challenge 2

Can you trace each doodle without lifting your marker?

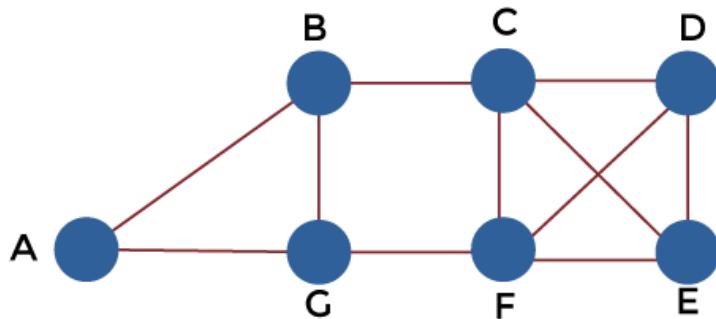
Circle the points that you start and end on. Do you notice a pattern?



(izvor mi je nepoznat)

³⁵ Branka Dejić, Mirko Dejić: Matematika kao igra 1 i 2: Element, 2015

A18: Putevi u grafu. (zgodno je grafove nacrtati na podu)



(uzeto s interneta, stranica mi je nepoznata)

Linije mogu na sebi imati i strelice. Može im biti zadana i duljina, ali onda bi to bili već zadaci za školarce. Put se sastoji od linija i smatrat ćemo da je onoliko dug koliko sadrži linija. Linije se još zovu bridovi grafa a čvorovi grafa.

Problem najkraćeg puta: Idi raznim putovima u grafu od točke B do točke E. Koji put je najkraći?

Problem raznosača kruha: Kreni iz mjesta A, obidi sve čvorove (dućane koji prodaju tvoj kruh) i vratи se u mjesto A. Nađi najkraću takvu putanju.

Problem smetlara: Kreni iz mjesta A, počisti sve ulice (linije) i vratи se u mjesto A. Nađi najkraću takvu putanju.

A19: Igra s linijama (iz knjige Ben Orlin: *Math Games with Bad Drawings*)

DOTS AND BOXES

A GAME OF SQUARES

In the introduction to his 130-page book *Dots and Boxes: Sophisticated Child's Play*, the mathematician Elwyn Berlekamp called this game "the mathematically richest popular child's game in the world." Whether he meant to call it a sophisticated game for popular children, a popular game for sophisticated children, or a sophisticated and worldly game for rich and popular children, the message is clear: This game slaps.

In this brief chapter, I can't lay out a complete theory of Dots and Boxes. Instead, I'll lay out something better: a complete theory of mathematical inquiry, straight from the scholar who first published the rules to this game.

Will reading these pages transform you into a rich, popular, and sophisticated child? Legally, I can't promise that. So just look at my winking eye, and sally forth.

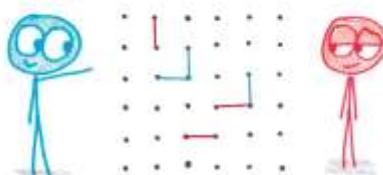
HOW TO PLAY

What do you need? Two players, a pen, and an array of dots. I recommend 6-by-6, but any rectangular array works.

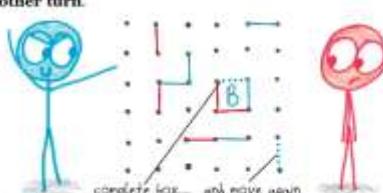
What's the goal? Claim more boxes than your opponent.

What are the rules?

1. Take turns drawing little vertical or horizontal lines to connect adjacent dots.



2. Whoever draws the fourth line to complete a small box gets to claim the box as their own (by writing their initial inside), and then immediately takes another turn.



This rule may allow you to claim several boxes in a row before your opponent

A19: Konstrukcije u prostoru. Razni konstrukcijski materijal: drvene kockice, Lego, magneti,

.....



A20: Oblikovanje. u glini, tijestu, pijesku, ---

A21: konstrukcije u ravnini. razni 2d konstrukcijski elementi



Simon Gregg @Simon_Gregg · Jun 13

In Saturn Class, K: growing patterns #istlive

...



4

6

34

2.6K

↑

A22: Spajanje dijelova.

Kupovne puzzlice ili:

Izreže se karton na dijelove pa se spoji, prvo pomoću slika, a onda bez slika



A23 Rastavljanje na dijelove



(MouseMatics)

Какой набор кубиков нужен для каждой постройки?

Соедини

Закрась одинаковым цветом башни из одинаковых деталей

(MouseMatics)

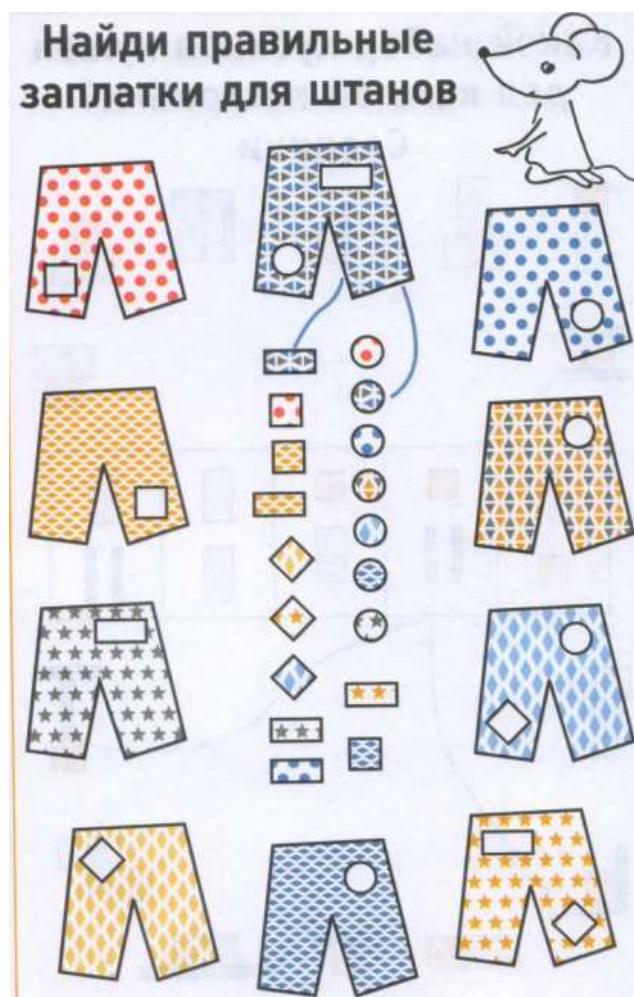


(MouseMatics)

A24: Popuni



(MouseMatics)

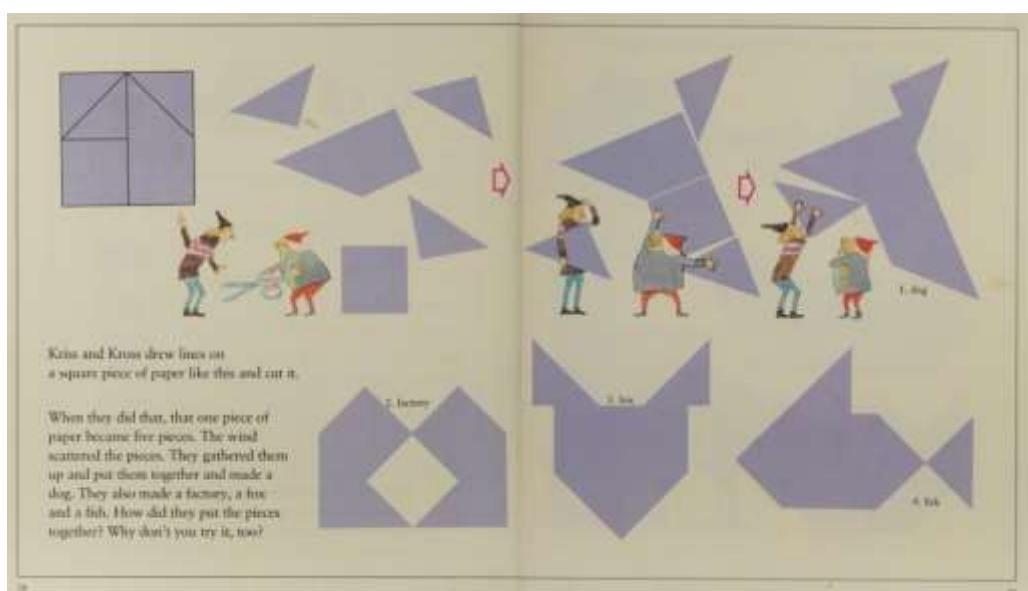
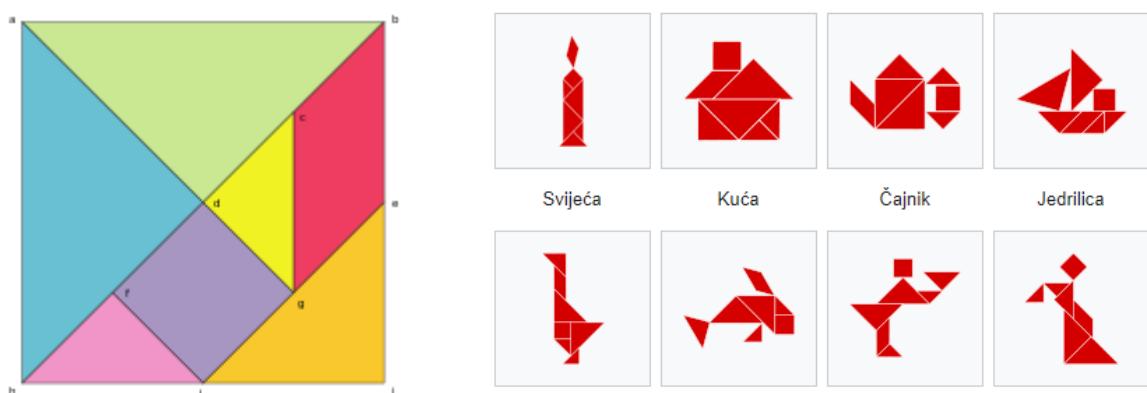


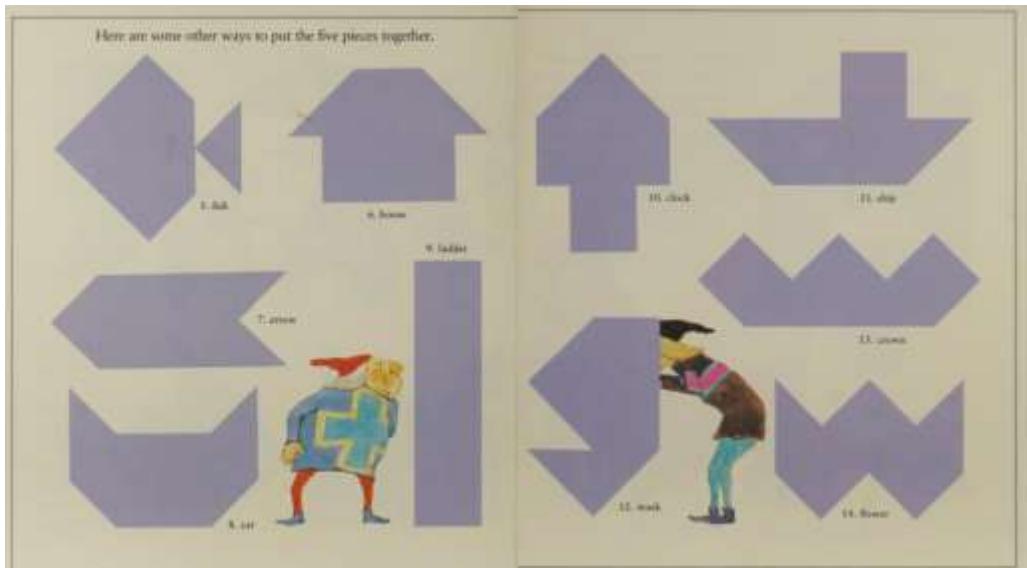
(MouseMatics)

A25: spajanje i rastavljanje likova

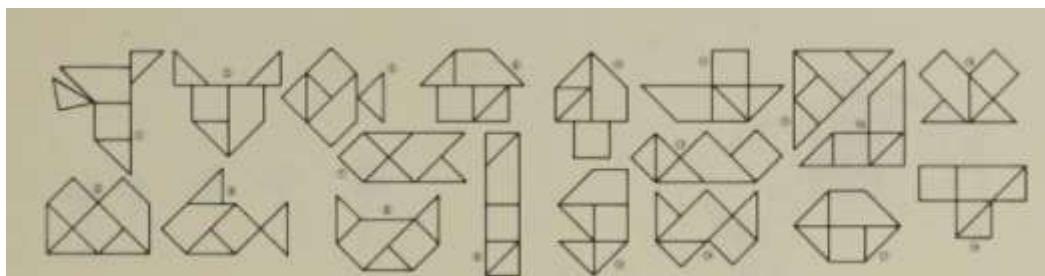


A26: pravljenje likova. Na tržištu se mogu pronaći razni setovi slagalica. Tangram je stara i izuzetno dobra slagalica. Sastoji se od 7 dijelova od kojih se mogu raditi svakakvi likovi (<https://hr.wikipedia.org/wiki/Tangram>)



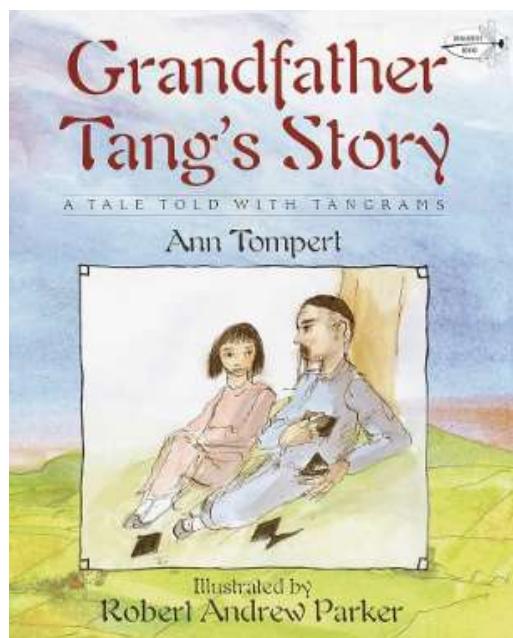


Ovdje su rješenja za gornje likove:



(Anno: Mathe Games I)

A27: Priča o djedu Tangu. U tražilicu utipkajte *Grandfather Tang's Story* – napravite dva tangrama i pokušajte sami reproducirati priču. Idealno bi bilo da jedan tangram vi sastavljate a jedan dijete).

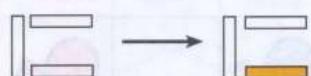


A28 Premještanje

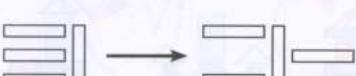
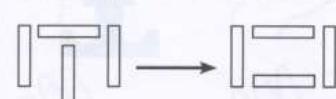
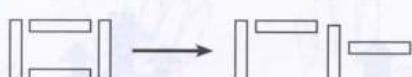
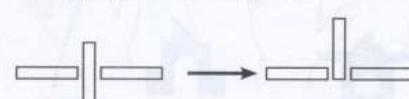
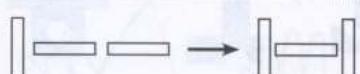
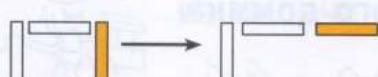
Отметь, какую палочку переложили

(MouseMatics)

Дорисуй пропавшие палочки, чтобы картинки снова стали одинаковыми



Какую палочку переложили?



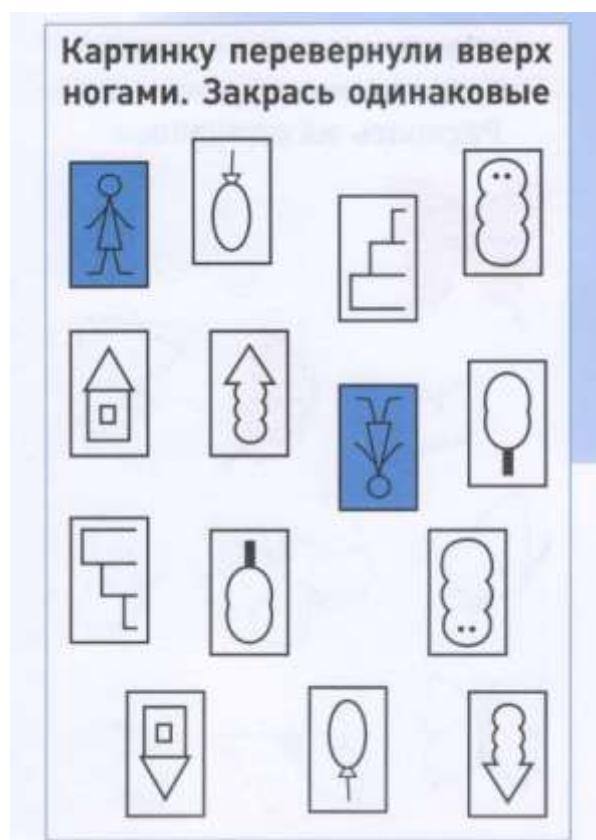
(MouseMatics)

A29 Rotiranje



(MouseMatics)

A30 Obrtanje



(MouseMatics)

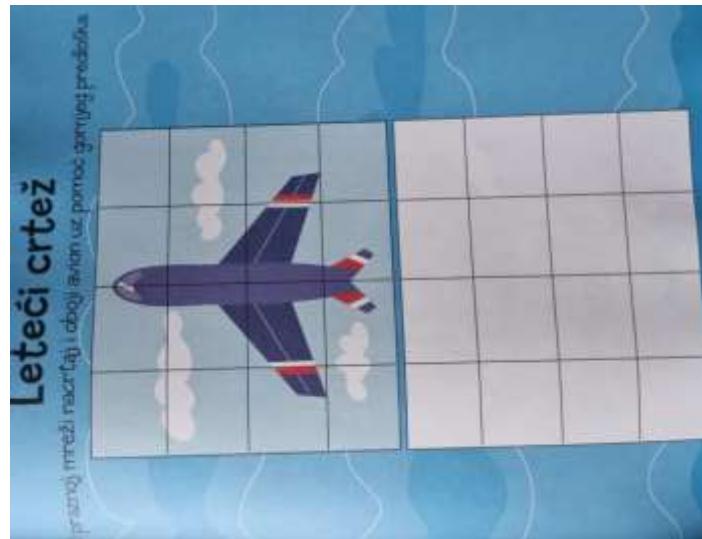
A31: Crtanje. Bilo čega. To razvija motoriku, osjećaj za oblike, vještinu reprezentiranja situacije, bilo prostorne ili emotivne. Svaki crtež je jedan mali matematički model nečega. Evo Nininog modela Neandertalaca (nakon posjete Krapinskom muzeju)



A32: Precrtavanje



(MouseMatics)



(Fora zbirka zadataka)

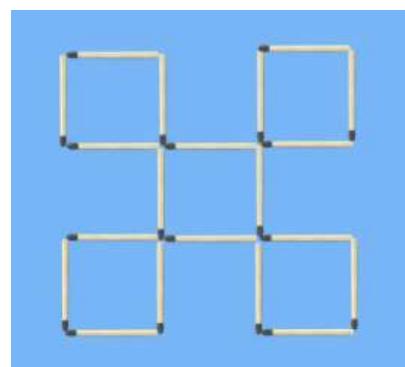
A33: Crtanje zarotiranog lika



(MouseMatics)

A34: Pravljenje likova.

Djeci je zanimljivo od vlastitih prstiju praviti razne likove. Likovi se mogu praviti i od šibica:



(<https://suresolv.com/brain-teaser/>)

Mogu se i peći u pećnici!



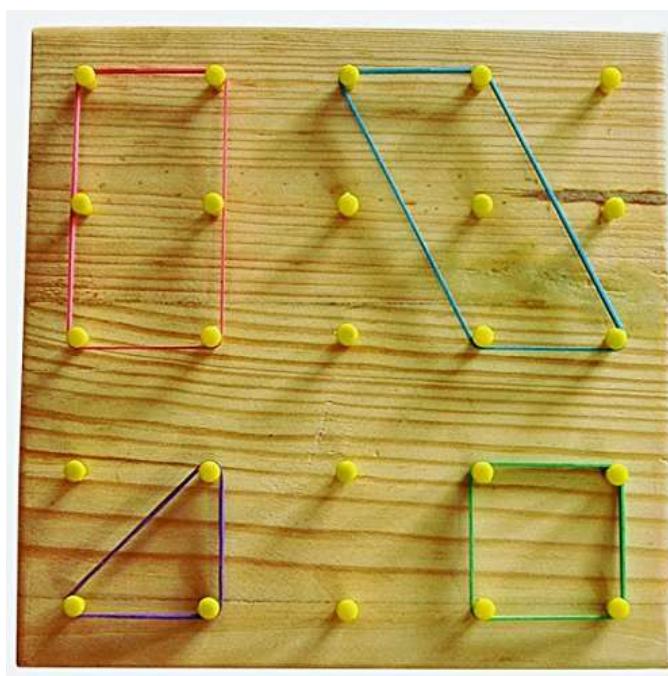
5 Place the wire rack of cookies on a baking sheet. Pour icing over the cookies. Let the icing dry until hardened, about 12 hours.



6 Arrange the cookies to make geometric shapes and patterns.

(iz knjige Karyn Tripp: Math Art + Drawing Games for Kids)

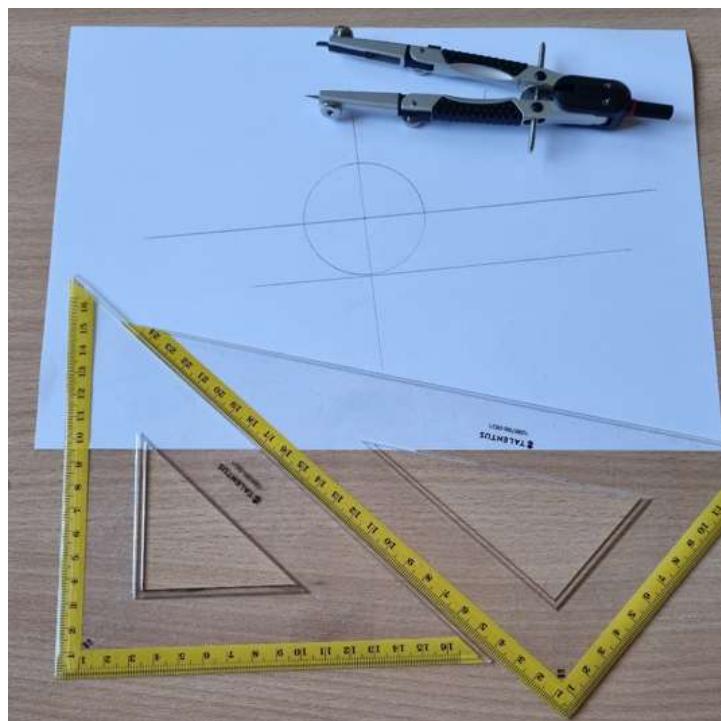
Može se koristiti i **geoboard**, kupovni ili ga sami napravite. Na daščicu zabijete čavliće u pravilnim razmacima i pomoću gumica se „razapinju“ likovi.



(<https://www.amazon.in/IDEK-Math-Wood-Geoboard/dp/B00LCH0WWQ>)

Razne ideje za pravljenje likova na geoboardu možete naći na stranici
<https://classplayground.com/geoboard/>

Može se čak malo vježbati pravljenje likova pomoću ravnala, trokuta i šestara:

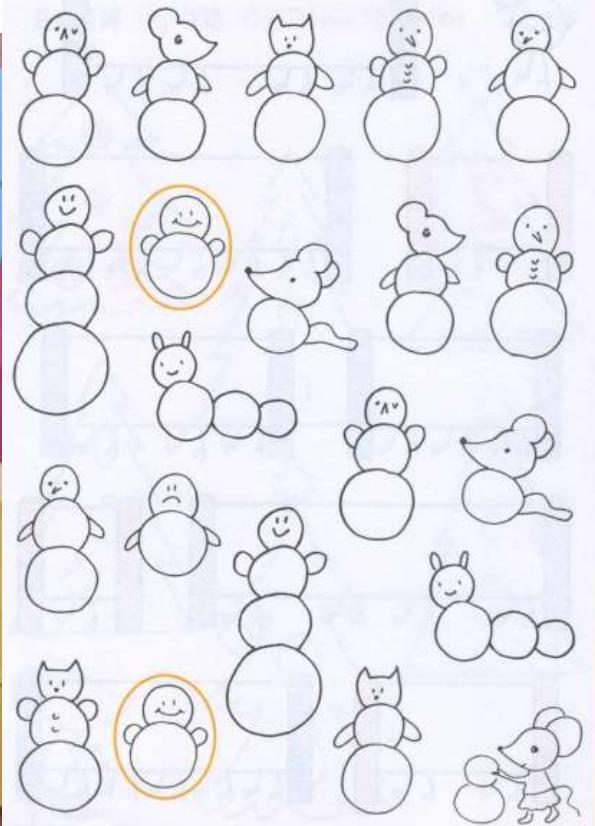


A35: prepoznavanje oblika

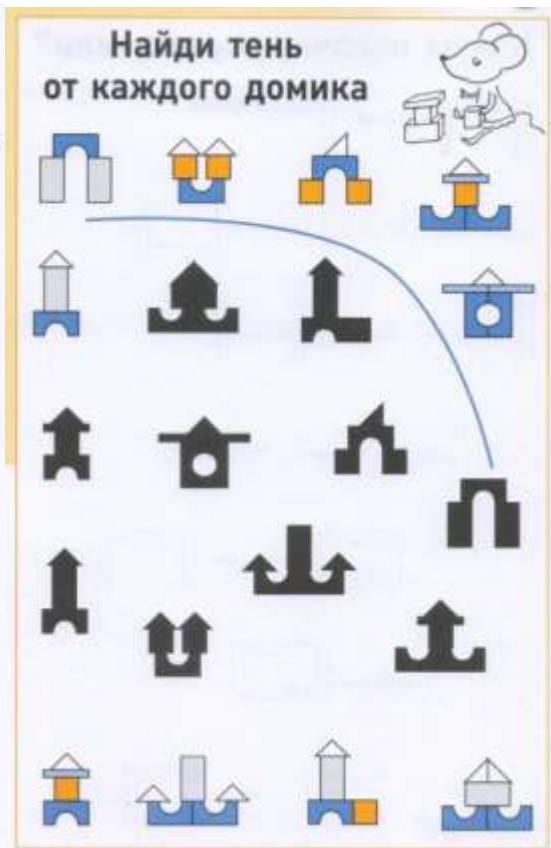
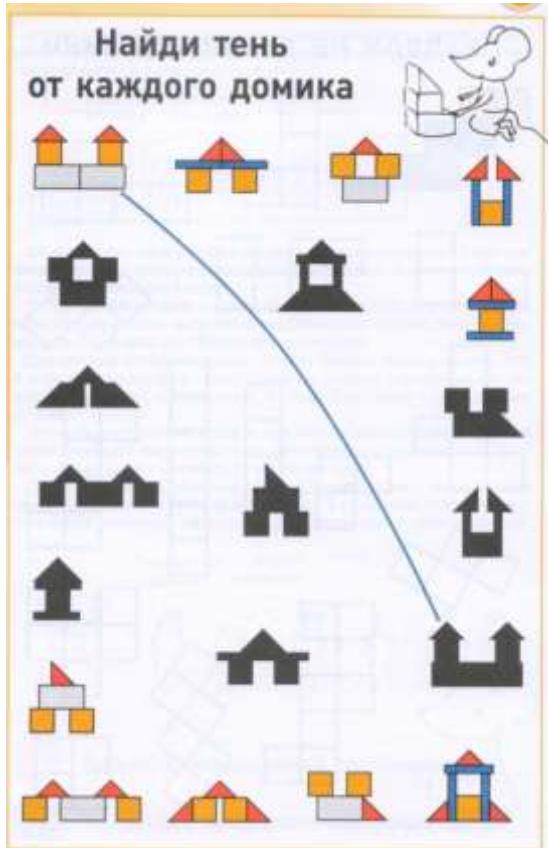
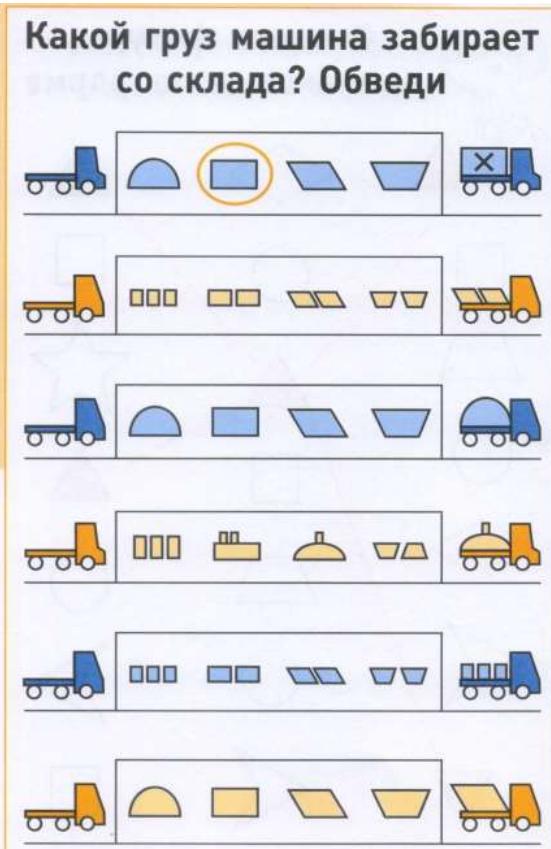
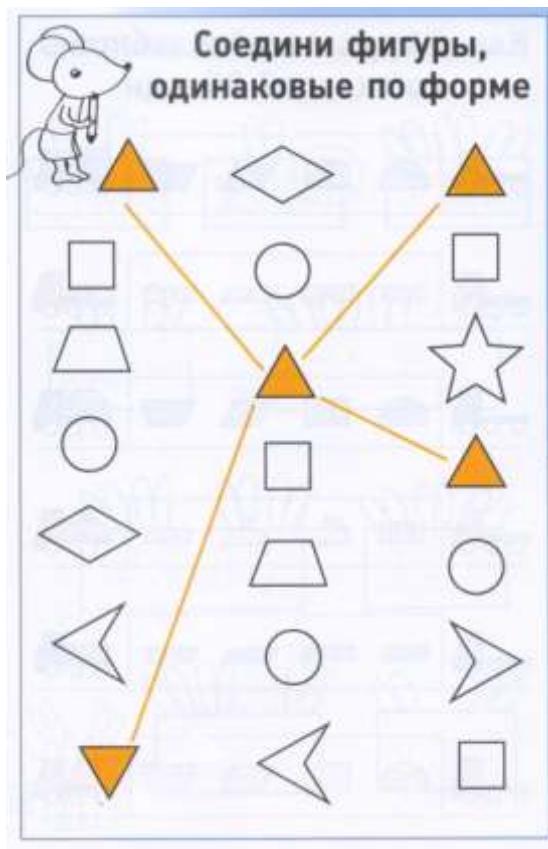


(Fora zbirka zadataka)

**Найди одинаковых снеговиков.
Обведи их одинаковым цветом**

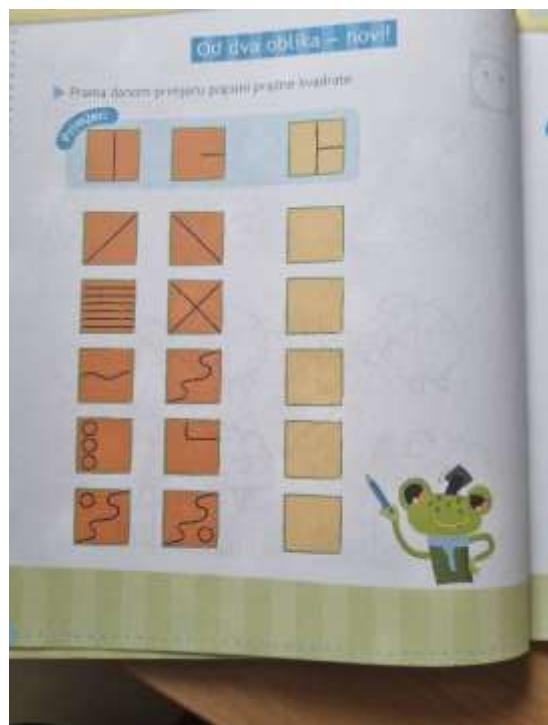


(MouseMatics)

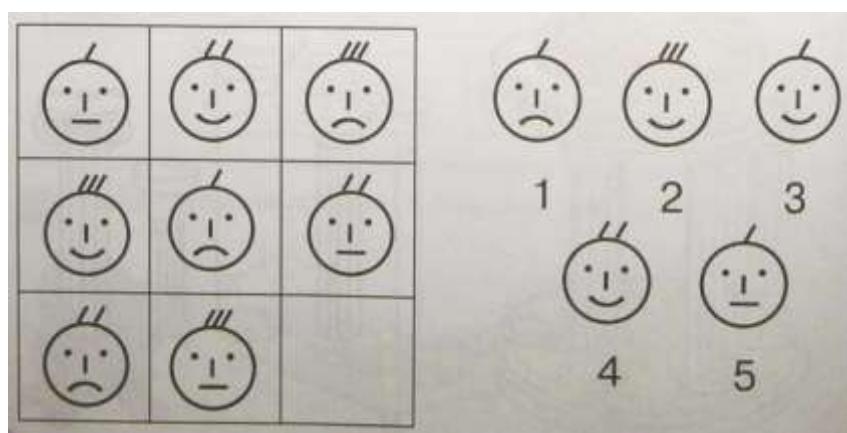




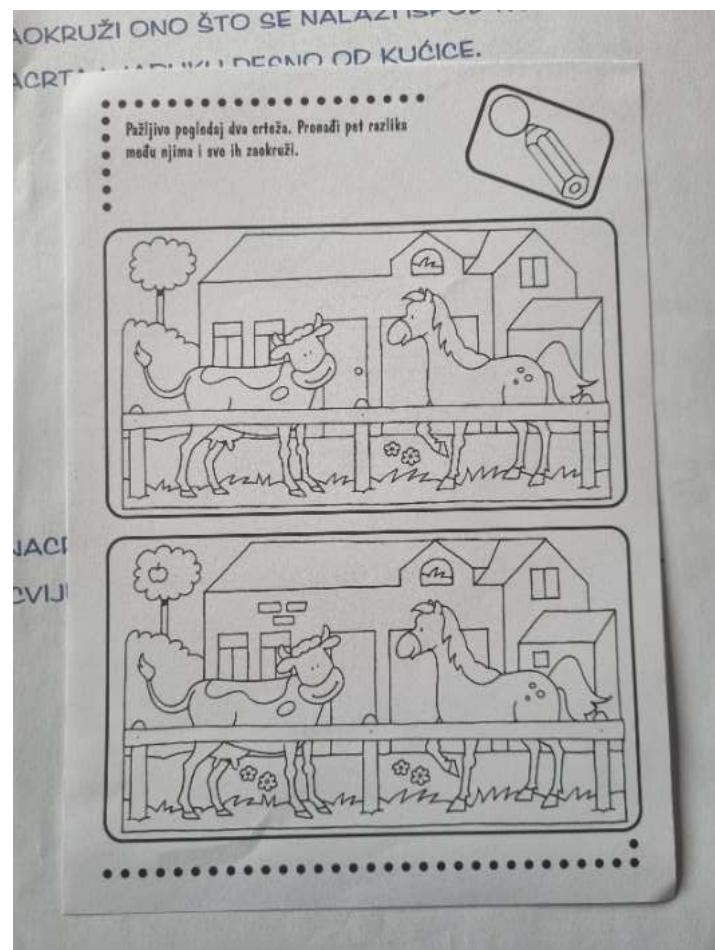
(MouseMatics)



(Dejić: Matematika kao igra)

A36: uočavanje razlika

(nepoznat mi je izvor)



(nepoznat mi je izvor)

A37: prostorno raspoređivanje stvari i memoriranje.

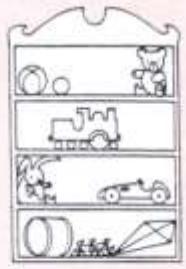
Planiranje prostora -uređenje sobe, uređenje ormara, polica s igračkama.

A38: Opisivanje neke prostorne situacije. Igra: Pogleda se neki prostor, pa se po sjećanju mora pogoditi gdje je šta.

FIGURE 13

Recalling the position of many objects

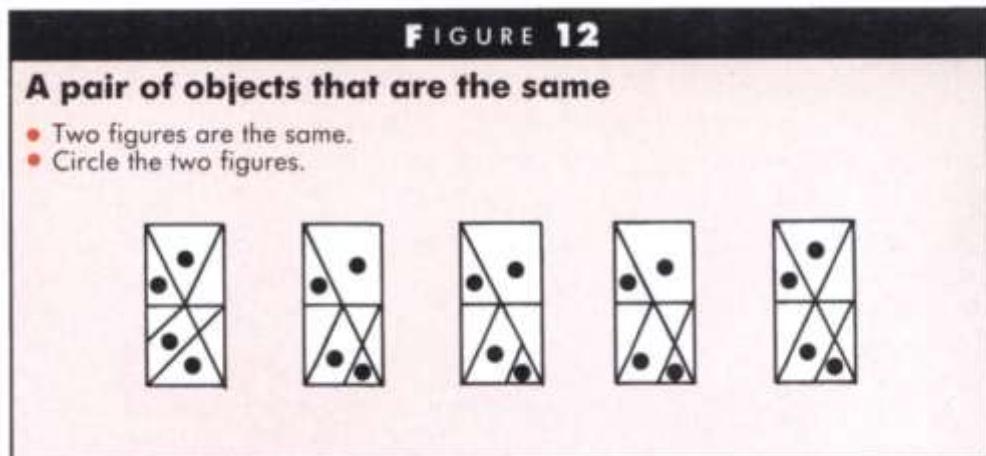
Draw a line from each toy to the shelf on which it belongs.

(a) 

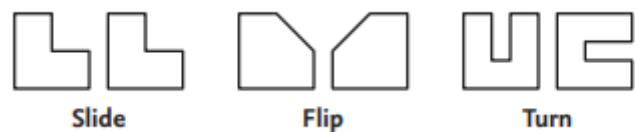
(b) 

(nepoznat mi je izvor)

A39: Kongruentnost i sličnost. Uočavanje kongruentnih (sukladnih likova) - likova koji se mogu premještanjem preklopiti jedan na drugog (imaju isti oblik i iste dimenzije). Uočavanje sličnih likova – likova koji imaju isti oblik (uvećavanjem i premještanjem se može jedan lik preklopiti na drugi).



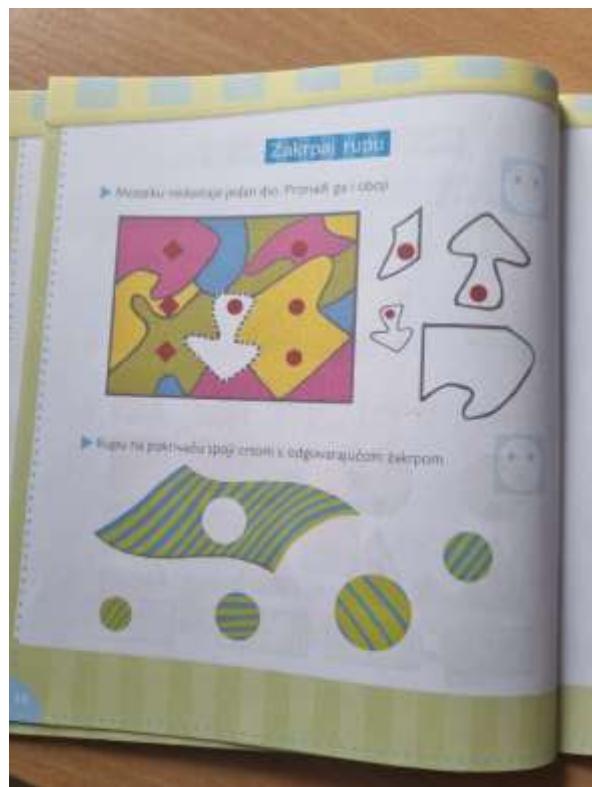
(nepoznat mi je izvor)



(nepoznat mi je izvor)

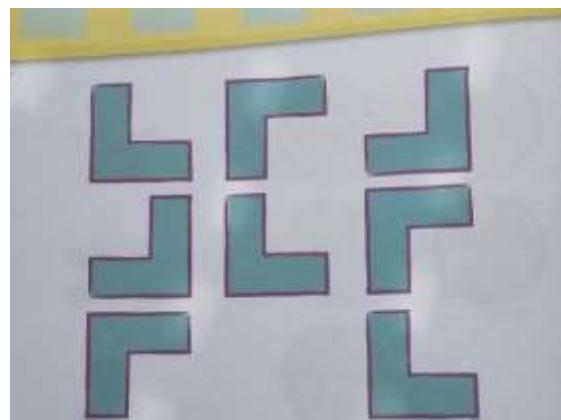


(Dejić: Matematika kao igra)

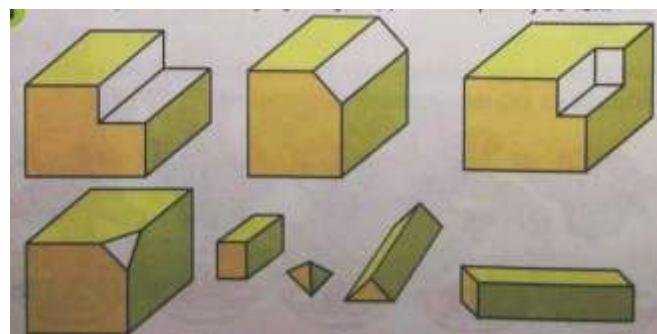


(Dejić: Matematika kao igra)

Nadopuni lik koji nedostaje:



(Dejić: Matematika kao igra)



(Mousemathics)



(Fora zbirka Super zadataka)

A40: Skaliranje Pokušati nacrtati umanjen ili uvećan lik.



A41:Simetrije. Iza našeg osjećaja za simetriju leži precizan matematički pojam. Simetrija lika je preslikavanje ravnine (ili prostora) koje prebaci lik u njega samog. Na sljedećim slikama su lijepo prikazane različite vrste simetrija. Nažalost, izgubio sam informaciju iz koje knjige sam kopirao ove slike.

MIRROR, MIRROR...

Look at your reflection in a mirror; it is exactly the same as you, except it is back to front. When a shape is reflected it might look very different or exactly the same, it depends on where you put the mirror. If it looks the same, the mirror is on a line of symmetry.

HALVE IT!
You might be able to draw a face, but can you draw just half?

- Draw a straight line down the center of a piece of paper. This is your line of symmetry where you will place a mirror after you have finished drawing.
- Draw half the face on just one side of the line.
- It might help to fold the paper in half along the line you have drawn so you don't accidentally draw on the wrong side.

4 When you have finished your picture, put a mirror along the line of symmetry and look into it. You will see a face with two sides that are exactly the same, making a whole symmetrical face.

HELPFUL HINTS

- Before you start to draw the face, look at your own face in a mirror. Hold a large book up across half your face like this. How many eyes can you see? Hair? How much of your mouth can you see? What about your nose?

MORE IDEAS

- A famous Italian inventor and artist named Leonardo da Vinci used to keep a diary. He wanted to keep his thoughts secret so he wrote it in mirror writing, back to front! It was hard to read.
- Can you write your name in mirror writing? Try it and check by holding it up to a mirror.

REFLECTIVE SYMMETRY

Some shapes have more than one line of symmetry. This means you can put the mirror in more than one place and the shape will still look the same. A square has four lines of symmetry, a rectangle has two.

SPRING BUNTING!
Have you ever seen bunting at a fair or a party? There are usually long lines of repeating symmetrical patterns. Often each shape in the pattern is a reflection of the one before it.

- It is fun making these patterns — you could make one to decorate the border of a bulletin board or frame one of your pictures.
- Fold a piece of paper in half twice like this. If you have a long piece of paper, you can make more folds.

3 With the paper still folded out of a square from one end, draw a shape in pencil on the paper — what about the outline of a person?

4 Now cut out the shape while it is still folded. Get an adult to help you with this. Don't cut the sides where the shape meets the edges. Then unfold the paper; lots of perfect mirror images of your original shape will appear!

HELPFUL HINTS

- When you draw your design, you need to make sure that it touches both sides of the square where the folds are. If you don't, when you cut out the shape all the bunting will fall into pieces!

MORE IDEAS

- This is a great way of using reflective symmetry to make place mats for a party. Draw around a large plate and cut it out. Fold it in half and again and once more like this. Now, use the scissors to cut out small parts. When you have finished, unfold the shape and admire your handiwork!

ROTATIONAL SYMMETRY

If a shape is moved around a central point and still looks the same when it is in its new position, we say it has **rotational symmetry**. A square has rotational symmetry of order 4 because it can be rotated four times into a different position but still appears to be the same.

IN A SPIN
You can make some amazing shapes with rotational symmetry.

1 Draw a shape on some cardboard no bigger than your hand. It might have curves or straight lines or a mixture of both. Don't make it too complicated; it might be difficult to cut out!

2 Cut out the shape and pierce it roughly in the middle with a push pin. You might need an adult to help you with this.

3 Put the shape in the middle of some paper and draw around it lightly. Rotate it around the push pin a quarter turn so it is facing to the right and draw around it again. Repeat this with the shape facing you then with it facing to the left.

4 Lift the shape and the push pin off the paper and use a thick marker to draw around the edge of the new shape you have created. This new shape has rotational symmetry of order 4. You will find that it can be rotated to four different positions and still look the same.

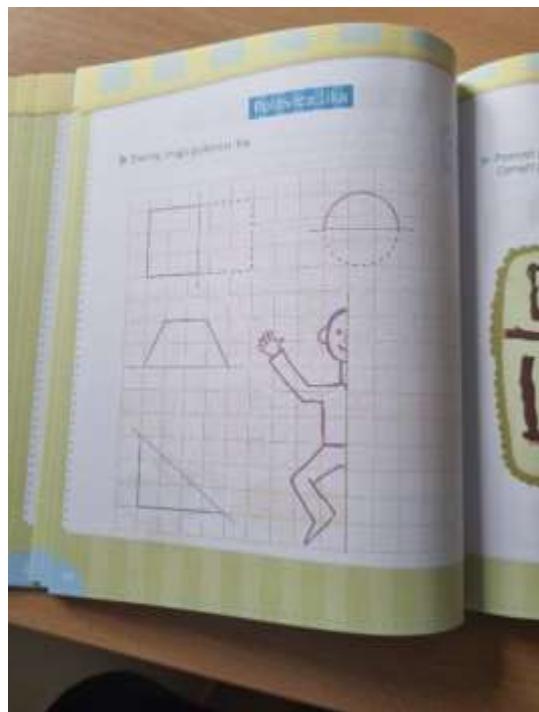
HELPFUL HINTS

- When you are rotating the shape on the paper, put a thick wad of newspaper underneath; otherwise the pin might make a hole in the table!

MORE IDEAS

- It is easy to make shapes with rotational symmetry of order 8. Imagine the eight points of a compass like this.
- Make a new small shape and rotate it to face each of the eight points of the compass. Draw around the edge, or perimeter, and then cut it out and mount it as you did before.

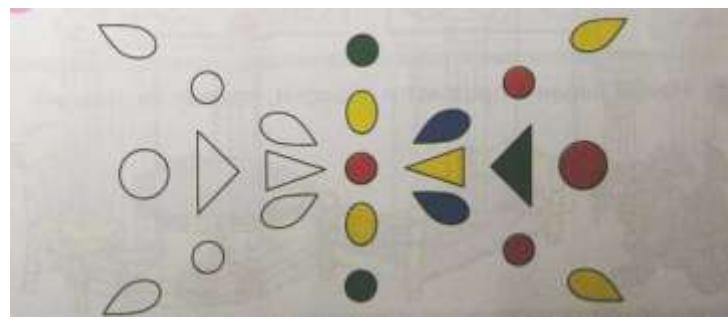
A42: Simetrije crtanjem



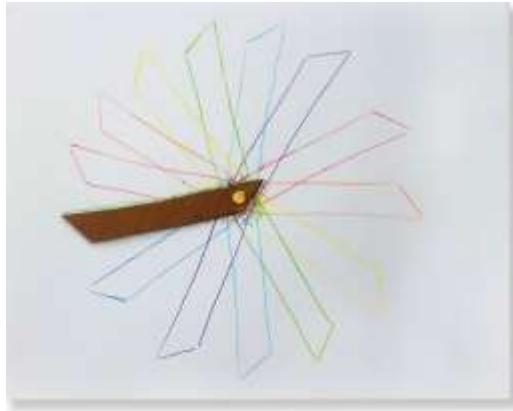
(Dejić: Matematika kao igra)



(Fora zbirka zadataka)



(uzeto s interneta, stranica mi je nepoznata)



Trace the shape. Turn it a small amount and trace it again. Continue turning and tracing the way around until you reach the beginning.



(Tripp: *Math Art and Drawing Games for Kids*)

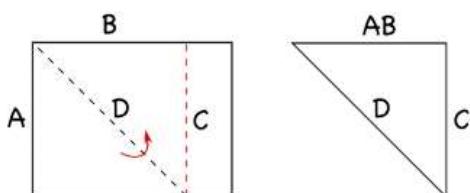
A43: Simetrije sa papirom i škarama

Savijanjem i rezanjem papira se mogu dobiti veoma zanimljivi simetrični likovi. Na internetu se može naći mnoštvo videa i stranica na kojima se demonstrira kako se to radi. Sljedeće slike su uzete s jedne takve stranice. Nažalost, izgubio sam informaciju o toj stranici.

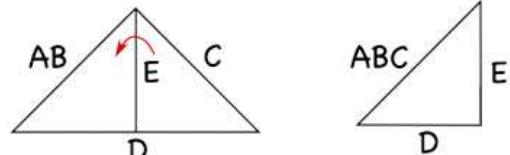
— Snowflakes —

This is a sequence of folds for creating 6-point snowflakes. Though it takes a few steps, don't be put off by them - with a little practice they become quick and easy.

Start by taking a standard sheet of paper and folding at one of the corners so the sides marked A and B meet. Leave the fold in place and cut along the line marked C.



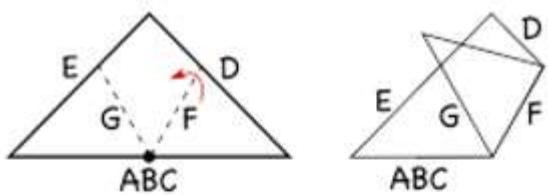
Take the triangle produced and fold it in half so that sides AB and C overlap.



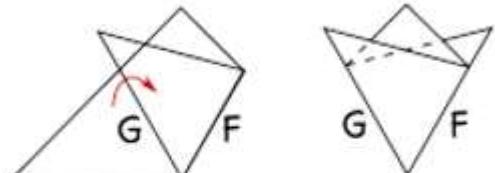
Put a temporary fold in this triangle and use the fold to mark the middle of side ABC. Undo the temporary fold.



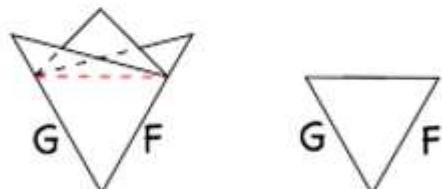
Make a fold over F. When you fold over F, you will be looking to have G placed so that G breaks the angle in half.



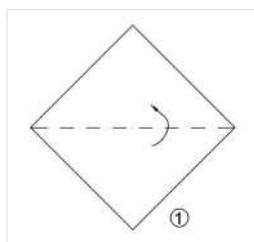
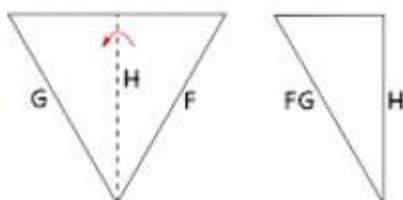
Fold along G - do this fold underneath so that this new folded piece is underneath the other paper.



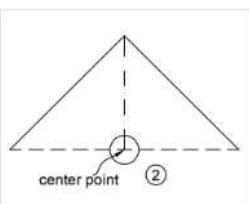
Although not strictly necessary, it is a good idea to slice off the top of this figure. Otherwise, you might be tempted to use the region above the red dotted line without realizing that there isn't paper on all levels.



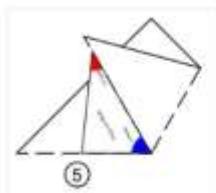
Lastly, fold this triangle in half. At last you are all set to do the cutting of your design!



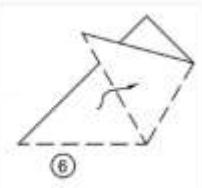
1. Follow the line fold the paper into half.



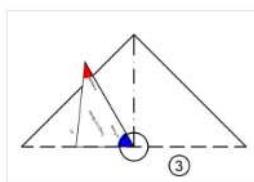
2. Find the center point at the folded side and make a crease.



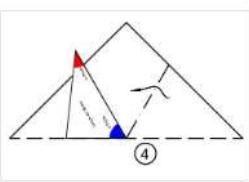
5. Then move away the template.



6. Fold the paper as the picture 6 showing.



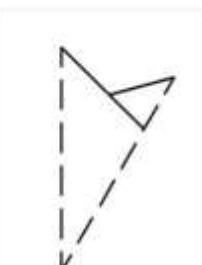
3. Put the template 6 points (blue corner) to the center point, as the picture 3 shows.



4. Fold the paper to the side of the template.

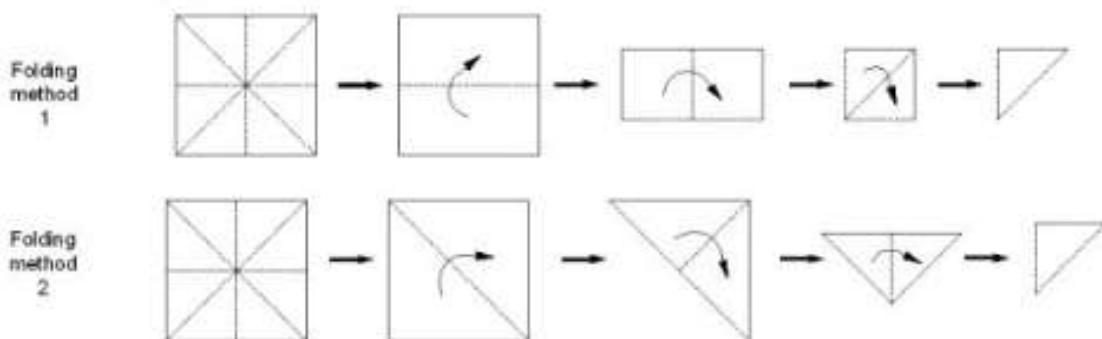


7. Fold the paper again.



8. You finished a perfect 6 points or 6 repeats folding.

4-sided paper folding instructions:



Kirigami Paper Cutting

Kirigami is a style of origami, but it involves cutting the paper as well as folding it. The term *kirigami* comes from the Japanese words *kiri*, which means "cut," and *kami*, which means "paper." This project uses a few simple shapes to make three-dimensional pop-outs.

Math in Action: concentric circles, geometry, parallel lines, perpendicular lines

What You'll Need

paper
cutting templates (see here)
scissors
thread or string



- 1 Copy one of the templates onto a piece of paper.



- 2 Fold the shape vertically through the center, where all the lines begin and end. This creates a center dividing line. Unfold, then fold the paper horizontally, matching up the lines on the left side.

- 3 Cut along the lines on the left side. Unfold. Refold horizontally, matching up the lines on the right side this time. Cut along the lines on the right side.



- 4 Unfold. Fold each section in alternating directions forward and backward, as shown. Hang by a thread as a decoration.

(Tripp: *Math Art and Drawing Games for Kids*)

U knjizi Claudia Zaslavsky - *Math games and activities from around the world* može se naći mnoštvo simetričnih uzoraka iz tradicija mnogih zajednica.

Mon-Kiri Cutouts from Japan

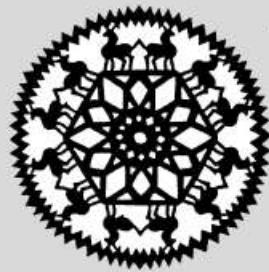


Figure 59a

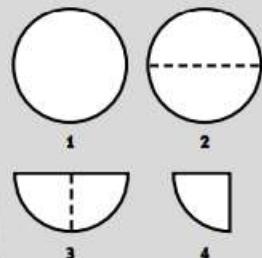


Figure 59b

DESIGNS AND SYMMETRY

120

The Chinese and Japanese people have a long history of cutting complicated designs in paper. In fact, archaeologists discovered a Chinese papercut that was made about 1,500 years ago. **Figure 59a**

In the old days warriors would decorate their armor with these designs. Now the designs appear as decorations in books, on people's homes, and in many other places. Paper cutouts are often used in making cartoon movies.

In Japan this art is called *mon-kiri*, the art of folding and cutting paper to make designs. You can make a beautiful cutout in the style of mon-kiri. You might want to give it to a family member or a friend for a birthday or valentine.

MATERIALS

- 5-inch (12.5cm) circle of white paper
 - Pencil
 - Scissors
 - 6-inch (15cm) circle of black construction paper
 - Glue
 - 8-inch (20cm) square of red construction paper

MAKING A MON-KIRI CUTOUT

1. Fold the white circle in half, then in half again. **Figure 59b**
 2. Along the folded edges draw several designs that will be easy to cut out.
 3. If you like, draw a border pattern along the rim of the circle.
 4. Cut out the design and the border pattern. **Figure 59c**
 5. Glue the white circle to the black circle so that the black border is even all around.
 6. Glue the black circle to the red square so that the margins are even all around. **Figure 59d**

THINGS TO THINK ABOUT AND DO

Look at the mon-kiri you made. Imagine that you can draw a line and fold it so that one half fits over the other half. Can you draw two different fold lines? These are lines of symmetry.

Place a finger on the center of the mon-kiri. Give the circle a half turn. Now it looks the same as when you started. The pattern looks the same in two different positions.

Fold another white circle as directed above. Then fold it again, so that you have eight layers of paper. Draw and cut out designs. Before you open the circle, can you imagine how many times each design will appear?

Experiment with squares and circles of paper folded in different ways. Draw and cut out the designs. Before you open the paper, try to imagine how it will look. Then open the paper. Did you imagine it correctly?

Look at the patterns you made. How many lines of symmetry can you find in each pattern? In how many different positions does the pattern look the same when you turn it about the center?

Another form of Japanese papercutting is called *origami*. Read the book by Eleanor Coerr, *Sadako and the Thousand Paper Cranes*, a true story about a little Japanese girl who was poisoned by radiation when an atom bomb was dropped on her city during World War II. She and her friends believed that if they folded a thousand paper cranes, she would become well. Sadly, she died before they had finished the task.



Figure 59c

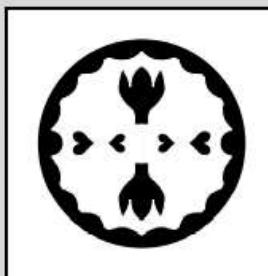
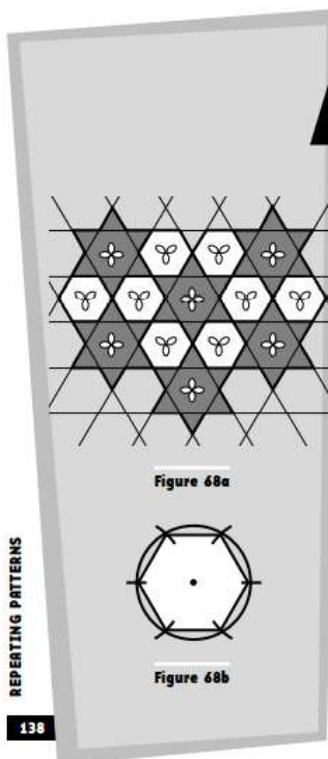


Figure 59d

DESIGNS AND SYMMETRY

121

A44: Tessellations



REPETITIVE PATTERNS

138

Be A Tessellation Artist Islamic

You can learn to draw tessellations using only a compass and a straightedge, like the Islamic artists. This tessellation is made of equilateral triangles and regular hexagons. **Figure 68a**

MATERIALS

- Large sheets of paper
- Compass
- Pencil
- Ruler or straightedge
- Colored markers or crayons

DRAWING A TESSELLATION

You will start by constructing a regular hexagon using a compass and a straightedge. Then you will draw the six equilateral triangles to form a six-pointed star. With this star as the center, you can repeat the design in all directions.

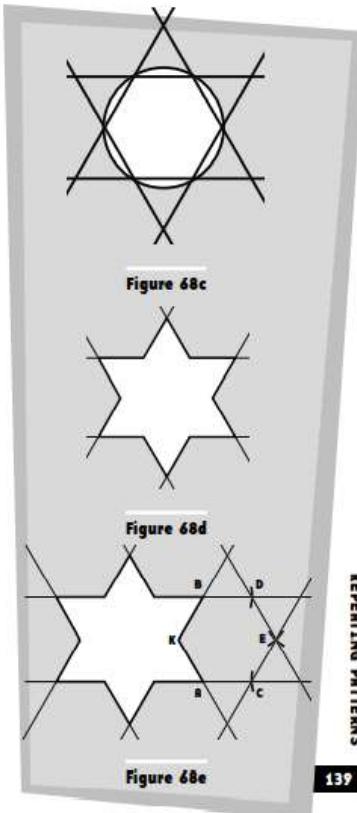
1. Follow the directions on page 136 to construct a hexagon. Draw the construction lines lightly in pencil. **Figure 68b**
2. Extend the lines that form the sides of the hexagon. Now you have a six-pointed star. **Figure 68c**
3. Erase the circle, the hexagon, and the construction marks. Outline the star with a heavy pencil line. **Figure 68d**

4. Draw six hexagons around the star. Here are directions to draw one hexagon. Use the same opening (radius) of the compass as in Step number 1.
 - a. Place the point of the compass on the tip of the star at point A, and draw an arc at point C.
 - b. Place the point of the compass on the tip of the star at point B, and draw an arc at point D.
 - c. Then draw arcs from points C and D that intersect at point E. Draw a line through points C and E. Draw another line through points D and E.

Figure 68e
- d. You now have a hexagon. Draw a heavy pencil line to outline it.
- e. Follow the directions above to draw five more hexagons around the star. You will find that you have already drawn some of the lines you need. You have also constructed many more triangles.

5. Continue as far as you can. Color the stars in one color and the hexagons in another color. Islamic artists liked to draw flowers in the center of each shape.

Don't be discouraged if your pattern is a bit lopsided. This craft takes a lot of patience. Keep at it, and you will have a beautiful work of art!



REPETITIVE PATTERNS

139

A45: Quilts

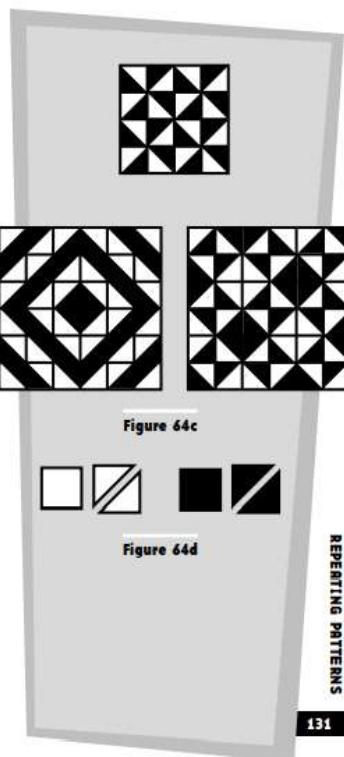
For the squares, or patches, women and girls used leftover bits of fabric and pieces of worn-out clothing. Nothing was wasted. Only a very special quilt or one made for a wealthy home rated large amounts of new material. Let's design a simple quilt with paper squares. You should cut out at least thirty-six squares.

MATERIALS

- Pencil
- Ruler
- 2 or 3 sheets of white or light-colored paper
- Marker or crayon
- Scissors

MAKING A PAPER QUILT

1. Use the pencil and ruler to divide each sheet of paper into two-inch (5cm) squares. You should have at least thirty-six squares. **Figure 64a**
2. Draw the diagonals of all the squares. Color each half of each square contrasting colors. **Figure 64b**
3. Cut out the squares.
4. Arrange the squares in a pleasing pattern to make a large quilt. Here are some ways to combine the squares. You can rotate some squares a quarter turn or a half turn. **Figure 64c**
5. You may want to keep the best pattern. Copy it on a sheet of construction paper or glue the squares to the sheet of paper. Draw a border around it as a frame, or glue it to a larger sheet of a contrasting color. You have just created a *tessellation*. A tessellation is a pattern that covers a surface completely by combining certain shapes. Your tessellation is made up of squares.



131

REPEATING PATTERNS

Figure 64d

Figure 64e

Figure 64f

132

THINGS TO DO

You can make interesting three-by-three quilt blocks. Each block will have nine squares. You need two sheets of paper in two different colors. Cut out nine squares of one color and nine squares of another color. Take four squares of each color and cut each square into two triangles. **Figure 64d**

Combine the squares and triangles to make a three-by-three quilt block. These are two traditional quilt blocks. They are called "Shoo Fly" and "Ohio Star." **Figure 64e**

Both have symmetry. Look at each quilt block. Find four different turn positions. Then find four different fold lines. (See page 116 for a discussion of these terms.) Here is one fold line, a diagonal. **Figure 64f**

Sew a patchwork quilt cover out of cloth. First plan it on paper. When you cut the fabric, allow an extra centimeter all around for the seams.

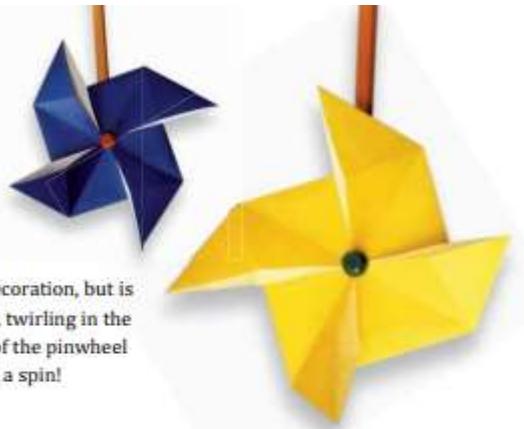
Read books about quilts. Some describe different kinds of quilts in various cultures and how to make them. *The Quilt-Block History of Pioneer Days, with Projects Kids Can Make*, written for children by Mary Cobb, gives instructions in quilting. There are also children's storybooks that describe the importance of quilts in the lives of the characters. One example is Deborah Hopkinson's *Sweet Clara and the Freedom Quilt*.

A46: Savijanjem i rezanjem papira se mogu dobiti razni oblici. Na internetu se može naći puno takvog materijala. Pogotovo su poznati papira **origami**
<https://en.wikipedia.org/wiki/Origami>

Pinwheel

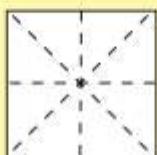
Traditional Design

This classic model makes a lovely room decoration, but is most exciting as a dynamic action model, twirling in the breeze. Once folded, loosely attach the center of the pinwheel to a pencil eraser with a thumbtack. Take it for a spin!



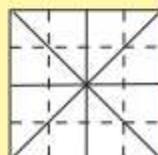
Instructions

1



Begin with the white side up. Valley-fold in half, corner to corner and edge to edge, in all four directions.

2

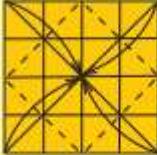


Fold and unfold each edge to the center. Turn over.

What You Need

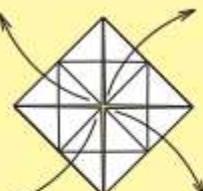
A square sheet of paper of any size. Try using multicolored papers, and watch how the colors seem to change when the model spins rapidly.

3



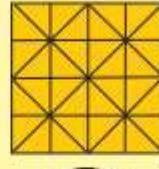
Fold all four corners to the center.

4



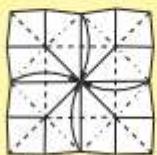
Unfold.

5



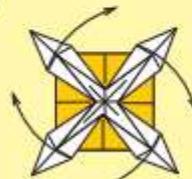
Your paper will look like this. Turn over.

6



Using the crease pattern, bring the center of all four edges to meet at the middle of the paper. Let each corner fold in half.

7



Fold each corner over, clockwise.

8



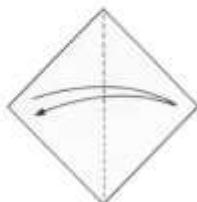
The finished Pinwheel.

(Michael G. LaFosse - *Origami Activities for Kids*)

Sljedeći materijal je preuzet iz knjige Florence Temko: *Origami for beginners*)

Kite Base, Pine Tree, Trick Mouse, Fantastic Flyer Airplane

KITE BASE (Use any square)



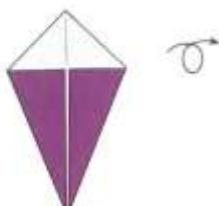
1. Fold in half. Unfold.

2. Fold in two edges to center crease.



3. Kite Base.

FANTASTIC FLYER AIRPLANE (Use any square and a paper clip)

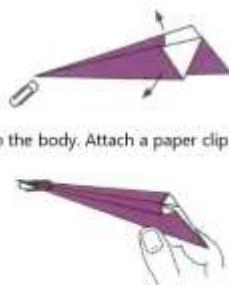


1. Fold a Kite Base. Turn back to front.



2. Fold edges in.

3. Mountain fold in half (refer to "Practical information", p. 3).



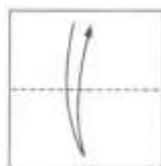
4. Place wings at 90° to the body. Attach a paper clip to the nose.



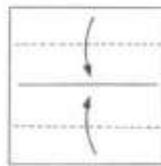
5. Fantastic Flyer Airplane. Throw airplane upward.

Boat, Sailboat Basket

BOAT (Use any square)

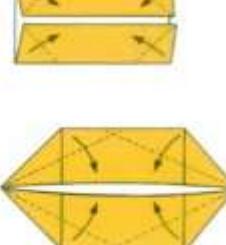


1. Fold in half. Unfold.

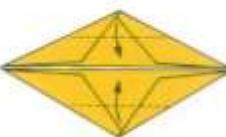


2. Fold edges in.

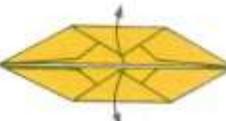
3. Fold four corners in.



4. Fold four corners to middle.



5. Fold corners to middle.



6. Reach in deep and spread sides apart.



7. Boat. Make a stronger model by returning to Step 1 and starting with the colored side up. Proceed to Step 7.



8. Pull top edges to the outside while pushing up bottom of boat, turning it inside out.



9. Inside-out Boat.



Bathtub Frolic

These paper boats float, but they last longer if they are made from waxed paper. To strengthen them even more, staple their sides.

Na internetu se može naći dosta dobrih videa za izradu origamija.

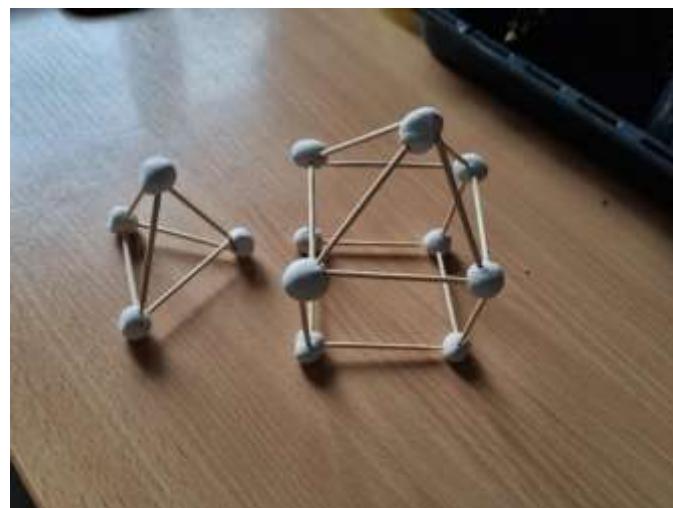
A47: Tijela

Pravilna tijela od papira:



(<https://www.minieco.co.uk/i-mathematics-platonic-solids-garland/>)

Tijela napravljena od čačkalica i gline (plastelina)



A48: Perspektiva. Zanimljivo je za neku prostornu situaciju zamišljati kako izgleda kad se gleda s neke pozicije

Activity 2

With several photographs of the same model or scene from different perspectives (e.g. front, sides and back), ask children to identify which of the photographs shows what the person can see? This could be one person or several people where the photographed perspectives could be matched to each person. The models can be recreated so that children can move around to experience the perspectives for themselves to check their answers.



Which photograph did the child take? How do you know? Why can't it be photo 3?
Frick et al. (2014)

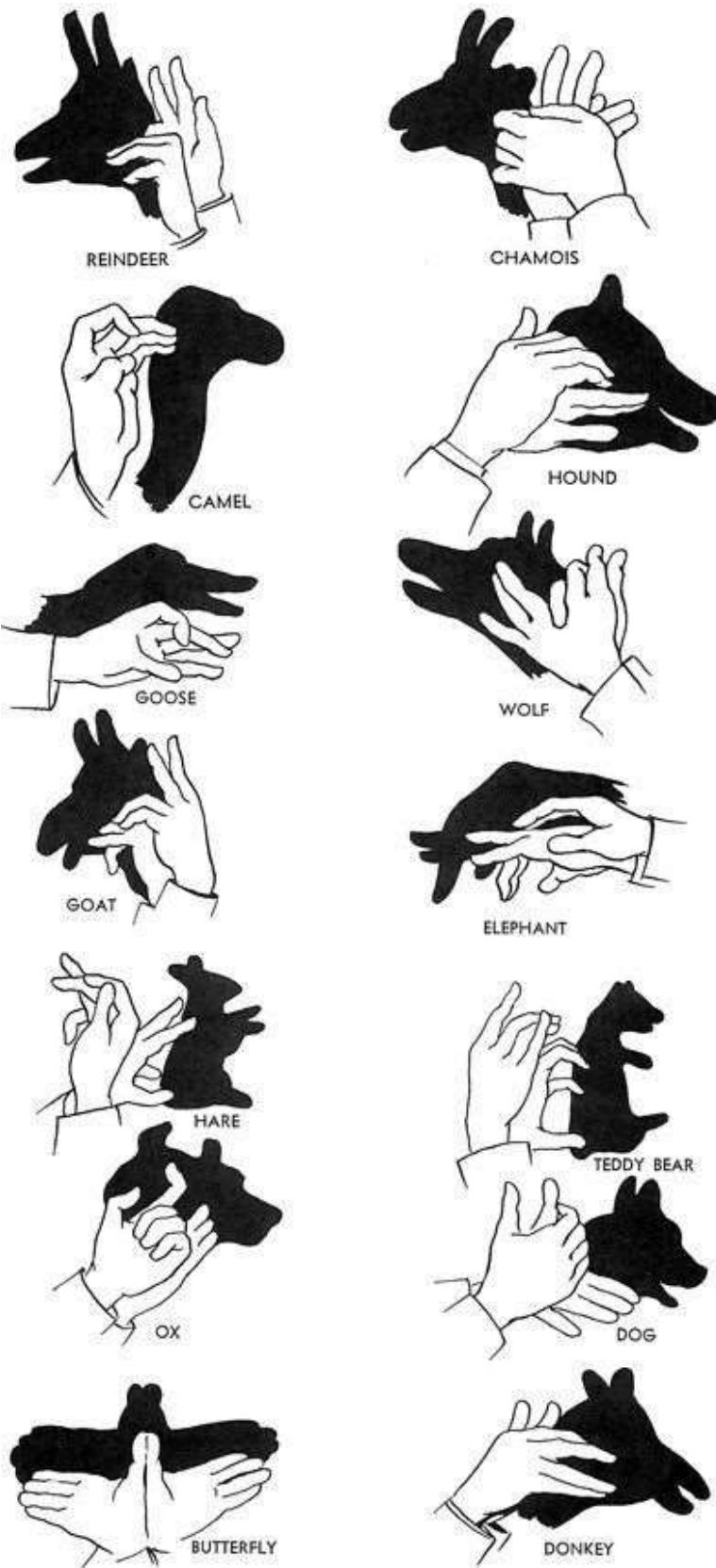
Activity 3

Using a painting of a landscape or city from an art gallery's online collection, children can draw what can be seen from a specific perspective in the painting, perhaps from a specific place or through the eyes of a specific person depicted in the painting. This can lead to discussion about what can and can't be seen from that vantage point as well as how landmarks might appear to be a different shape from this perspective. Children might enjoy swapping pictures to work out the perspective that another child has captured in their drawing or they might be able to represent this alternative perspective using blocks, playdough or construction. Switching between two and three dimensional representations challenges thinking so drawing on whiteboards and representing in dough can be good to begin with as these can be adapted easily as children develop their ideas.



(izvor mi je nepoznat)

A48: Projekcije. Pravljenje sjena pomoću prstiju je zabavna aktivnost koja nas ujedno uči o projekcijama. Na internetu se može naći puno stranica i videa koji imaju tu temu.



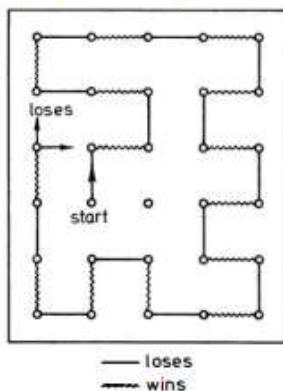
(<https://www.pinterest.com/pin/22729173097423415/>)

A49: Igra sa zatvorenom linijom.

Snake

A Game for Two

This game is played on a five-by-six board of dots, like this one. Players take turns at joining two dots by a line to make one long snake. No diagonal lines are allowed. You cannot leave any breaks in the snake. Each player adds to the snake at either end; a player can only add to his opponent's segment, not to his own. The first to make the snake *close* on itself loses. Here is an actual game. In it straight lines began and lost.



(izvor mi je nepoznat)

A50: Transformiranje stezanjem i rastezanjem (bez pucanja)

Materials

- ✓ Scissors
- ✓ Large rubber balloon
- ✓ Marker
- ✓ A plastic sandwich bag loosely filled with clay or playdoh and then closed
- ✓ Paper and pencil
- ✓ A ball, a small bowl or box, a mug with a handle, and a bagel (or any doughnut-shaped item with a hole in the middle)

In topology, you can stretch, squeeze, or twist a shape without changing what kind of shape it is. We'll explore how shapes are allowed to change in topology by transforming one shape into some others.

ACTIVITY 1: TRANSFORMING A CIRCLE



1. Cut the balloon in half lengthwise so that you have a sheet of rubber.
2. With the marker, draw a circle on the rubber sheet (**fig. 1**).
3. Try to transform the circle into a square by pulling on the edges of the rubber sheet. You might need more than two hands to do it (**fig. 2**).
4. Can you turn the circle into a triangle by pulling on the sheet? What other shapes can you transform the circle into? Because you didn't poke a hole, cut the sheet, tape parts of it together, or draw another line, topologists consider all of these the same shape.

MATH MEET

Name That Shape

Topologists classify shapes by putting them into categories. This is a fun contest for you and some friends. In five minutes:

- Who can classify the most shapes according to their number of holes?
- Who can find at least one object with zero, one, two, three, four, and five holes?
- Who can find the object with the most holes?
- Can you find a shape that your friends won't be able to classify? Bring your confusing shapes together and see if you can figure out how many holes they have!

FIG. 1: Draw a circle onto the rubber sheet.

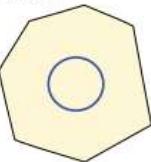
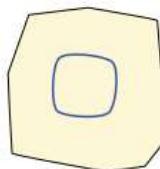


FIG. 2: Pull on the edges of the rubber sheet to transform the circle into a square and other shapes.



(Rapaport: *Math Lab for Kids*)

A51: Oblačenje.

Redoslijed oblačenja (što se mora prije čega obući).

Kako staviti jaknu na pod pa kad se uvuku ruke u rukave, ispravno se obuče, itd.



Zagonetka. Šta je to: U jednu rupu uđeš, kroz dvije izadeš. Kad si izašao, tek si onda ušao (hlače)

A52: Igra povezivanja točaka

SPROUTS

A GAME OF "CURIOS TOPOLOGICAL FLAVOR"

School geometry teaches us an ugly lesson: Size matters. In fact, size is the essence of matter. Angles can be acute, right, or obtuse. Figures can have length, area, or volume. Salted caramel mochas can be tall, grande, or venti. All of these traits boil down to size. Heck, the very name of the subject—"geo" meaning earth and "metry" meaning measurement—is about sizing up the world itself.

Does this size-conscious philosophy offend you? If so, you'll like topology. Its shapes stretch like rubber, squish like Play-Doh, and puff up like balloons. They're not shapes, really, but shapeshifters. In this oozing, lava-lamp world, size doesn't matter. In fact, "size" doesn't even mean anything.

Topology seeks deeper truths.

There's no better introduction to these truths than a game of Sprouts. Which spots can be connected? How many regions will form? What's the difference between "inside" and "outside"? Hold on to your hat—or the topological equivalent thereof—and enjoy a game that any child can play, yet no supercomputer can solve.

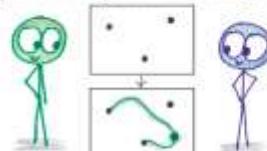
HOW TO PLAY

What do you need? Two (or more) players, a pen, and paper. Start by drawing

a few spots on the page. For your first few games, three or four spots are plenty. **What's the goal?** Make the final move, leaving your opponent with no viable options.

What are the rules?

1. On each turn, **connect two spots (or connect a spot to itself)** with a smooth line, and **place a new spot somewhere along the line you just drew**.

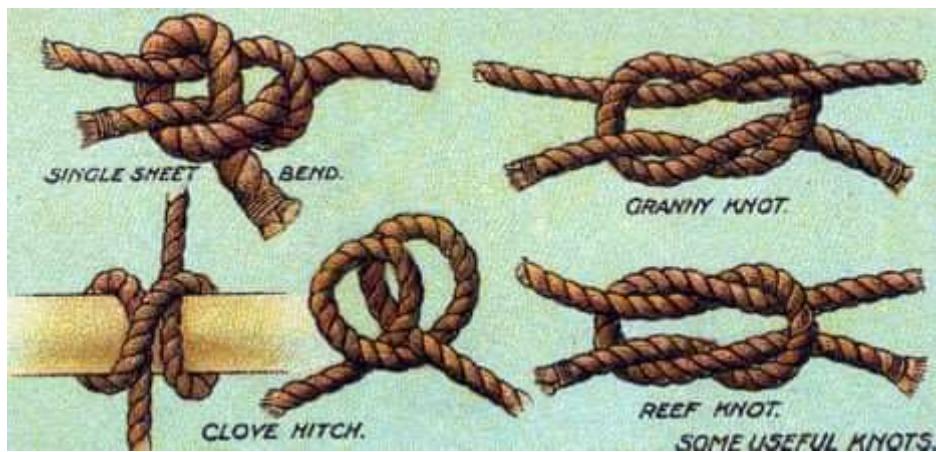


2. Just two restrictions: (1) Lines cannot cross themselves or each other, and (2) each spot can have at most three lines sprouting from it.

(Orlin: *Math Games with Bad Drawings*)

A53: korisni čvorovi To može biti najobičnije vezanje cipele. Na internetu možete naći puno videoa i siteova na kojima se pokazuje kako se prave čvorovi za razne namjene. Na sljedećem linku je brošura koja objašnjava kako se rade osnovni skautski čvorovi:

https://www.scoutadventures.org.uk/sites/default/files/2018-05/Simple%20Knots%20-%20Factsheet_0.pdf



(<https://www.theguardian.com/lifeandstyle/shortcuts/2014/nov/03/joy-knots-scouts-reef-tie>)

A54: Glavolomke s čvorovima. Možete na internetu naći videa s raznim „trikovima“ s čvorovima. Jedan trik je i u priči u Dodatku 1: uhvate se krajevi užeta i na užetu treba napraviti čvor a da se ne puste krajevi. Tu spada i trik u kojem morate čvor napraviti na užetu kojim su vam zavezane ruke, itd.

A55 Pletenje

Popravi ogradu

► Kojim ćeš od ponuđenih dijelova popraviti ogradu?
Zaokruži ga.

The illustration shows a wooden fence with a missing section. To the right, there are four options (A, B, C, D) showing how to fix the fence. Option A shows a horizontal bar being placed across the gap. Option B shows a vertical post being placed at the end of the fence. Option C shows a vertical post being placed in the middle of the gap. Option D shows a horizontal bar being placed across the gap, similar to option A.

(Dejić: Matematika kao igra)

Na internetu se može naći mnogo video i web stranica o pletenju za djecu. S jednog takvog mjesto je uzeta i ova slika



<https://www.howwemontessori.com/how-we-montessori/2018/09/montessori-inspired-finger-knitting.html>

A56 : Möbiusova vrpca. Dobijemo je tako da traku prije zavrнемo prije spajanja u krug.



https://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius_strip

S njom možemo „čuda“ raditi. Evo jedne uvodne glavolomke. Imamo vrpcu papira recimo metar dugu, škare i selotejp. Treba zalijepiti papir a onda ga izrezati, pri čemu se ne smije ništa više lijepiti niti odljepljivati, i dobiti kružnicu opsega 2 metra (dva metra dugu). Rješenje: Traku trebamo spojiti u Möbiusovu vrpcu i izrezati je uzduž, kako je niže prikazano :

MÖBIUS STRIPS, continued

ACTIVITY 2: CUT THE MÖBIUS STRIP AND CROWN

- Take your crown from Activity 1 and carefully cut down the center of the strip using the line you drew as a guide (fig. 5). How many pieces did you end up with? Was it what you expected?
- Do the same with your Möbius strip (fig. 6). What happened? Was it what you expected? Is there a Möbius strip in the resulting shape(s)? How can you tell, using a marker?

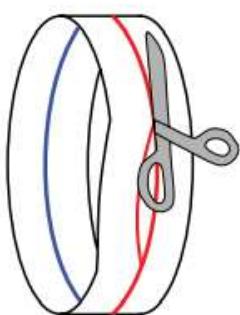


FIG. 5: Take your crown and carefully cut down the center of the strip.

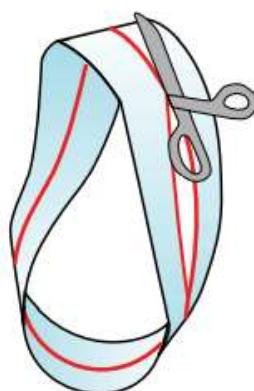


FIG. 6: Do the same with your Möbius strip and see what happens.

TRY THIS!

We made a Möbius strip by adding one half-twist to our paper before we taped it together. Try making rings with two half-twists, three half-twists, and four half-twists (you may need a longer strip of paper for these shapes). Using a marker, see if any of these shapes are more like our original crown or a Möbius strip. Do you see a pattern? Try cutting these strips down the middle. What happens?

How Many Sides?		
	One	Two
Zero twists		✓
One half-twist	✓	
Two half-twists		
Three half-twists		
Four half-twists		



Notice how the cut strip loops around itself. When you open up the band, that puts an extra twist in your final shape!

What's Going On?

When you cut a Möbius strip in half, you end up with a single long band that has two full twists. This band has two sides and two edges. The line you cut became the second edge. It's no longer a Möbius strip!

Counting the twists in the band can be confusing. The original Möbius strip had a half twist in it. After you cut it, each half of the original strip contributes half a twist to the final band, which accounts for one of the twists. In addition, the band is looped once around itself. When you unwind it to see the full band, that's where the second twist comes from!

(Uzeto iz iz knjige Rapoport: *Math Lab for Kids*.)

Evo niže još nekih prijedloga iz navedene knjige:

Materials

- ✓ Two strips of white paper about 2 inches (5 cm) wide and 22 to 24 inches (56 to 61 cm) long
You can make these by taping two strips cut from an 8.5 x 11-inch (21.6 x 27.9 cm) sheet together, but make sure the tape covers the whole width of the strip.
- ✓ Tape
- ✓ Markers in at least two different colors
- ✓ Scissors

ACTIVITY 3: CUT A MÖBIUS STRIP AND CROWN INTO THIRDS

1. Make a new paper crown and a new Möbius strip with the strips of paper.
2. Carefully draw a line around the crown again, this time about a third of the way from the edge. (Don't worry if it's not exactly a third.) Using a different color, draw another line about a third of the way from the other edge (**fig. 1**). Do the same thing with your Möbius strip (**fig. 2**). What is different between the lines you drew on the crown and on the Möbius strip?
3. Cut the paper crown along the lines that you drew (**fig. 3**). What shapes do you end up with?
4. Before you cut your Möbius strip into thirds, try to guess what shape or shapes you'll end up with—how many pieces, with how many twists? Once you've made your guess, cut the Möbius strip using your lines as a guide (**fig. 4**). What do you end up with? Is it what you expected? Use a marker to figure out if any of the shapes are Möbius strips.

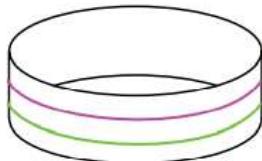


FIG. 1: Carefully draw a line around the crown about a third of the way from each edge.

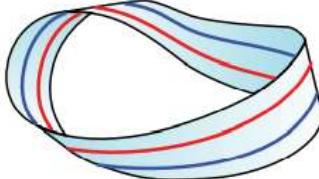


FIG. 2: Do the same thing with your Möbius strip

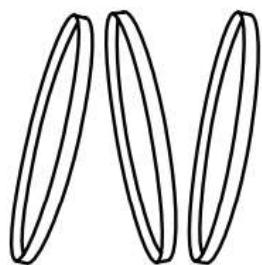


FIG. 3: Cut the paper crown along the lines that you drew.

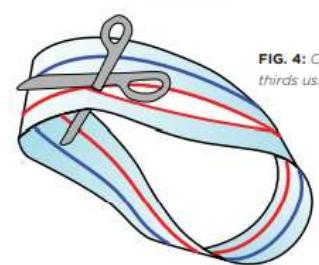


FIG. 4: Cut the Möbius strip into thirds using your lines as a guide.

TODD COOK: MOUNTAIN-REINFORCING CHADER

41



MÖBIUS SURPRISE



Materials

- ✓ Paper (8.5 x 11 inches [21.6 x 27.9 cm])
- ✓ Markers in two different colors
- ✓ Tape
- ✓ Scissors

Martin Gardner, a mathematician famous for introducing fun mathematical challenges to the public, invented an entertaining surprise using the concepts we just learned. Try it for yourself!

TRY THE MÖBIUS SURPRISE



TRY THIS!

The Möbius surprise is made by connecting a ring and a Möbius strip and cutting them. Try inventing other combinations of shapes and twists, cutting them, and seeing what you end up with. Can you invent a surprise shape named after you?

1. Draw a thick plus sign on a piece of white paper. Cut out the shape. Draw a single solid line across the short arm of the plus sign. Turn the shape over, and draw the same line on the back. Draw two dotted vertical lines dividing the long arm of the plus sign into equal widths. Turn the shape over and repeat these lines on the back of the paper (**fig. 1**).
2. Take the two horizontal arms, with the single solid line on them, and tape the edges together without any twists to form a ring. Make sure the tape goes all the way across the joint so that it won't fall apart later (**fig. 2**).
3. Take the remaining two arms and tape them into a Möbius strip opposite your original ring (**fig. 3**).
4. Before you cut along your lines, try to guess what the final shape will be (**fig. 5**). Will it be a giant ring? Several interlocked rings? Some other shape?
5. The order that you cut the lines is important. First, cut along the dotted lines (they should be on the twisted ring of the surprise). Next, cut along the solid line (**fig. 4**). What do you end up with?

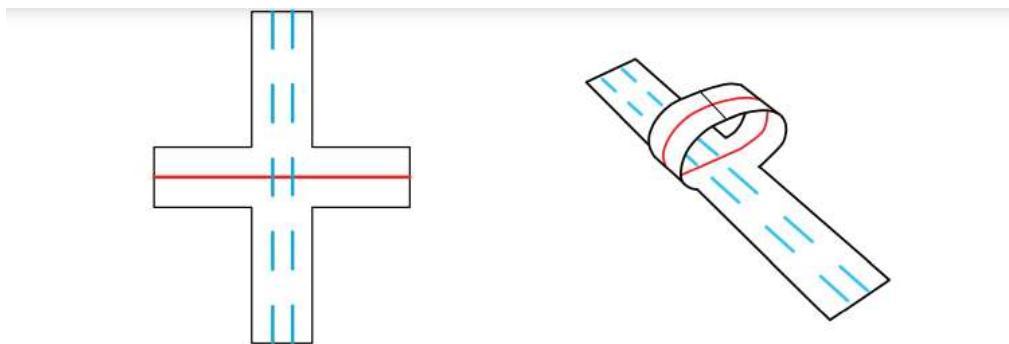


FIG. 1: Cut out the shape of a plus sign. Draw the horizontal and vertical cutting lines on both sides of the paper.

FIG. 2: Tape the short arms.

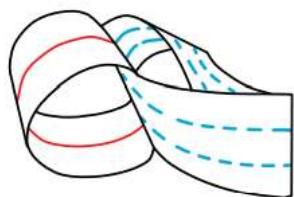


FIG. 3: Tape the long arms into a Möbius strip.

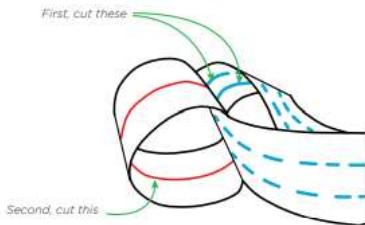


FIG. 4: First cut the dotted lines, then cut the solid line.

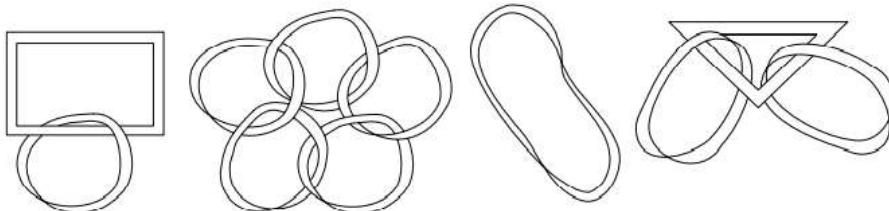


FIG. 5: Before cutting the lines, guess the result!

TOPOLOGY: MIND-BENDING SHAPES

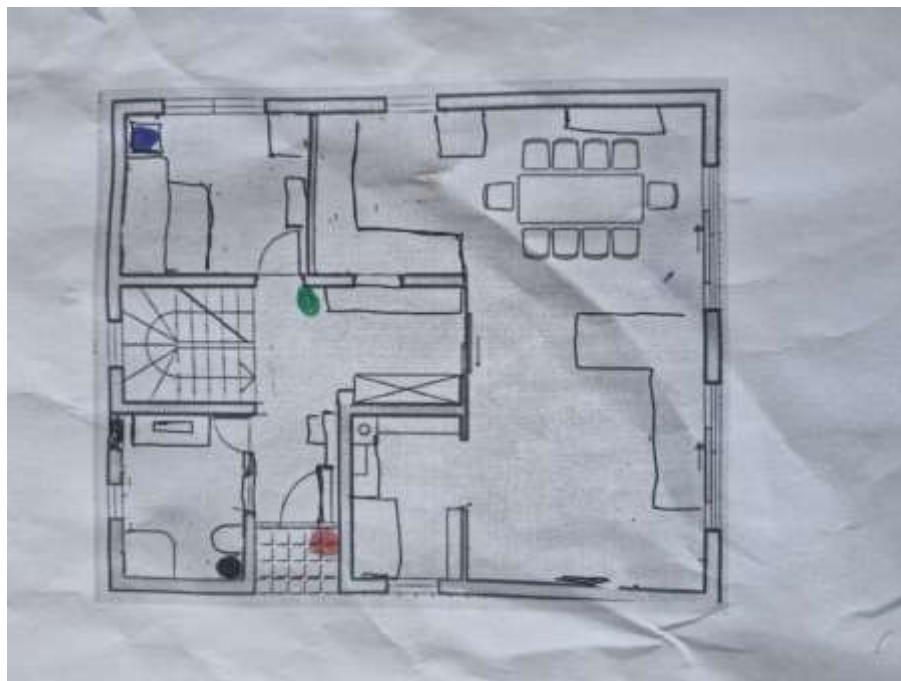
43

A57: Navigacija po uputama. Damo upute gdje se nalazi skriveni predmet – usmeno ili na papiru ako djeca znaju čitati.



(izvor mi je nepoznat)

A58: Navigacija po mapi. Sobe, stana, susjedstva, cijelog mjesta, zemaljske kugle. Npr nešto se negdje sakrije u stanu i onda se pomoću mape traži.



(Naznačena su neka mjesta gdje je Darko Ban Nini skrivaо poklone)

A59: 3D mape. Mogu se tu i tamo pronaći, npr 3D mapa centra grada ili planine. Djeci su jako zanimljive.

A60: Traženje označenog predmeta na mapi. Ovo se može raditi u prirodi. Sakrije se jedan predmet, djeci se da mapa po kojoj ga mogu pronaći.

A61: Skiciranje puta i kretanja do nečeg. pomoću ravnih i zakrivljenih strelica. Npr. označavanje puta do škole. Ili šetnja po zoološkom vrtu u Zagrebu



A62: Pogled odozgo. Kako krajolik izgleda ptici koja leti preko nekog područja. Kako ptica vidi našu kuću, susjedstvo. Ovdje i Google Earth može pomoći.

A63: Planiranje izleta.

A64: Pravljenje mapa.



(izvor mi nije poznat)

A65: Koordinatni sustav

Potapanje podmornica ali s primjerenim simbolima za koordinate, ako djeca još nisu usvojila slova ili numerale.

PRIJE BITKE PRIPREMITE

- 2 papira i 2 olovke
- na papiru nacrtajte mrežu kvadratića (10×10)
- nacrtajte svoju flotu:
 - 1 BORBENI BROD (4 okomita ili vodoravna kvadratića u nizu)
 - 2 KRSTARICE (3 kvadratića svaka)
 - 3 RAZARAČA (svaki po 2 kvadratića)
 - 4 PODMORNICE (1 kvadratić svaka)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
1										
2										
3	X									
4				X						
5						X	X			
6		X						X		X
7				X						X
8	X	X						X		
9										
10										

Od koliko će se kvadratića sastojati svaki pojedini brod i koliko će brodova biti, igrači mogu proizvoljno dogovoriti (kao na slici). O tome donekle ovisi koliko ćete "zakomplicirati" igru.

PRAVILA IGRE

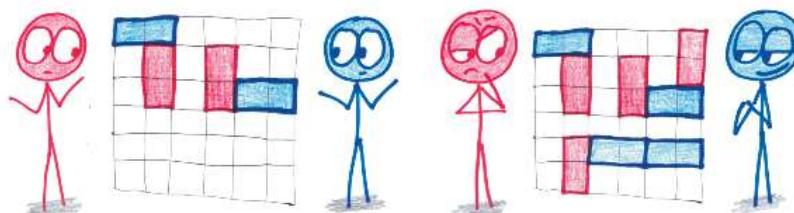
Olj je da svaki igrač pokuša prvi otkriti položaj suigračevih brodova. Svaki igrač napada skrivenu protivničku flotu, izgovarajući koordinate u protivničkoj mreži. Da bi vaša flota bila zaštićena od pogleda suigrača, na stol možete staviti improviziranu pregradu. Ako je protivnik "pogodio" vaš brod (vidi sliku - koordinata A-8), morate križićem označiti to polje i obavijestiti suigrača da je pogoden jedan od brodova. Također morate reći koji tip broda je pogoden, kao i naglasiti ukoliko je potopljen do kraja (ako su pogodeni svi kvadratični tog broda). Ako je protivnik "promašio" flotu, križićem se označava i njegov promašaj (vidi sliku - koordinata B-6). Igrači naizmjenično "pucaju", odnosno pogađaju koordinate, a kraj igre je kad je jednom od igrača potopljena cijela flota.

(<https://www.pjesmicezadjecu.com/drustvene-igre-pravila-igre/potapanje-brodova.html>)

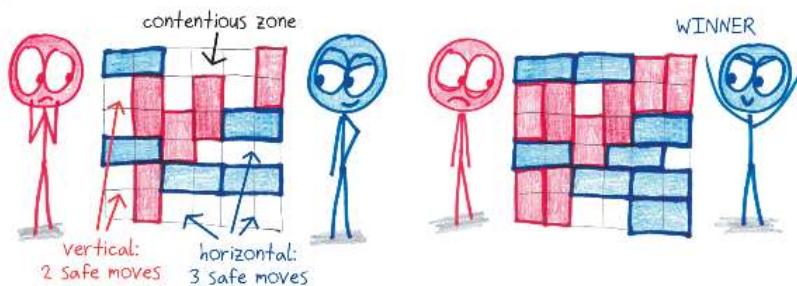
A66: Neke igre „u koordinatama“

A GAME OF CROWDING DOMINOS

In this game, two players take turns placing dominos on a rectangular grid. **One player lays dominos vertically; the other, horizontally.** (You can ignore the numbers on the dominos.) If it is your turn and you have **nowhere to place a domino, then you lose.**



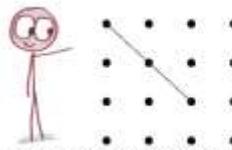
The early moves feel a bit random. But soon, corridors start to appear. You and your opponent vie to secure “safe” spots for the future. Eventually, the board breaks down into disconnected chunks, and you can tally exactly how many moves each player has left.



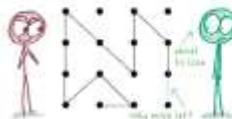
(Orlin: *Math Games with Bad Drawings*)

Also known as Stop-Gate or Cross-Cram, the game is a classic of combinatorial game theory, prominently featured in the canonical text *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. Whereas other classics (such as the million variations on Nim) serve better for mathematical analysis than casual gameplay, I find that Domineering works on both levels.

By the way, no need for actual dominos. You can play by filling in squares on a paper grid.



Then, take turns extending this line from either end by drawing another line (vertical, horizontal, or 45° diagonal). Extensions may be any length, but may not cross or touch. Play until no further extensions are possible. The person to draw the last extension is the loser.

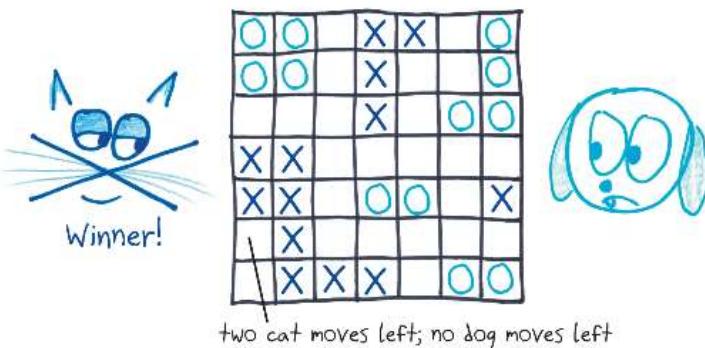


Sid's game resembles an older one published by Édouard Lucas alongside Dots and Boxes. Édouard's version has just a few differences: (1) You play on a 6-by-6 array of dots. (2) Each move must be a short vertical or horizontal line, connecting two adjacent dots. (3) You must build off of your opponent's most recent move, meaning that the "snake" grows from only one end. (4) The last player to move is the winner.

(Orlin: *Math Games with Bad Drawings*)

A GAME OF REFUSING TO GET ALONG

Draw a 7-by-7 grid on paper. Then, take turns placing your respective animals: for one player, "cats" (i.e., X's), and for the other, "dogs" (i.e., O's). Cats and dogs must never occupy neighboring squares, not even diagonally. The last player able to move is the winner.⁸



The game was developed by algebraist Simon Norton and was known in his honor as "Snort." Instead of cats and dogs, he imagined bulls and cows, grazing in various fields, liable to noisy snorts of distraction if placed too close to the opposite sex.⁹ The fields need not follow a grid arrangement; you can draw any convoluted map of regions that you like.

A related classic of combinatorial game theory, Col, reverses the key rule: opposite-species neighbors are allowed, and same-species neighbors are forbidden. Col is easier to analyze mathematically and, perhaps for that reason, less fun to play. Scattering your cats around the board, trying to keep them apart? Meh. Fencing off safe territories with jagged walls of cats? Now *that's* fun.

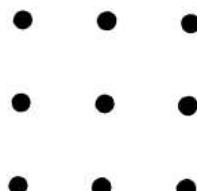
(Orlin: *Math Games with Bad Drawings*)

A67: Peg solitaire. You may remove pegs by jumping over them with another peg, as in checkers. Your goal is to jump these pegs over each other, one by one, until only a single peg is remaining (preuzeto sa <https://www.gamesforyoungminds.com/blog/2018/4/13/peg-solitaire>).



A68: Geometrijske glavolomke

Make a square with 9 dots as shown. Cross all the dots with 4 straight lines without taking your pencil off the paper.

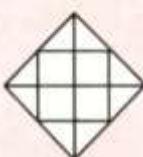


(izvor mi je nepoznat)

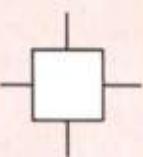
FIGURE 5

Figure completion

- Finish the figure in (b) to look like the figure in (a).



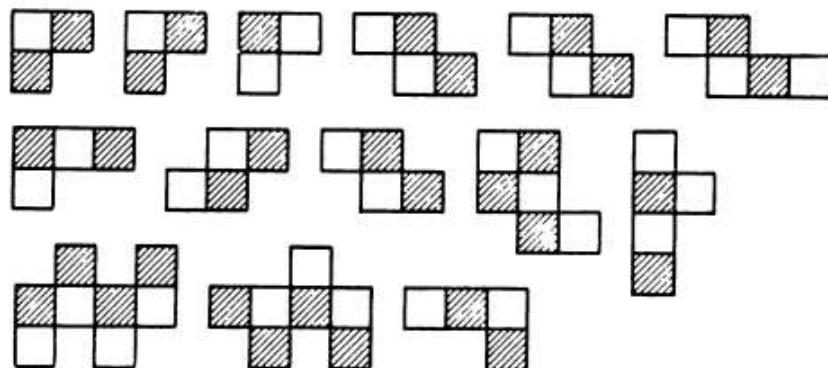
(a)



(b)

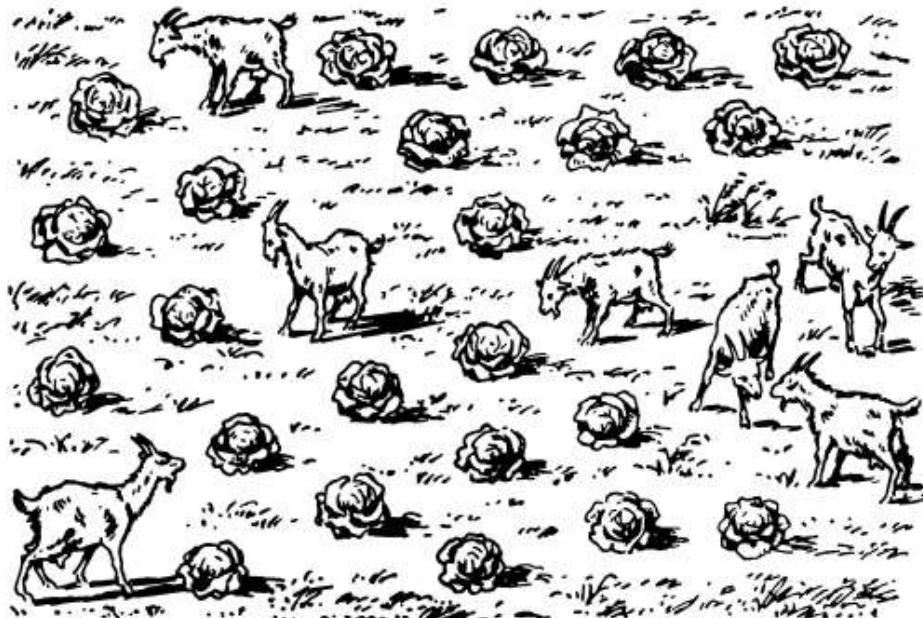
(izvor mi je nepoznat)

A merry chess player cut his cardboard chessboard into 14 parts, as shown. Friends who wanted to play chess with him had to put the parts back together again first.



(Iz knjige Kordemsky: The Moscow Puzzles)

The Moscow Puzzles



25. GOATS FROM CABBAGE

Now, instead of joining points, separate all the goats from the cabbage in the picture by drawing 3 straight lines.

(Iz knjige Kordemsky: The Moscow Puzzles)

7 Jezik

O velikoj važnosti jezika za (matematički) razvoj djeteta možete pročitati na strani 16.

A1: Slušanje priča i pričanje priča djetetu.

A2: Poticanje djeteta da samo priča priče.

A3: Izražavanje osjećaja i opisivanje situacija. Poticati dijete da jezično poprati ono što radi, čemu prisustvuje, što osjeća.

A4: Igranje riječima. Izmišljanje neobičnih riječi. Treba opisati šta je to – koje je značenje te riječi

A5: Igranje glasovima. Poticati dijete da povezuje da su riječi sastavljene od glasova a rečenice od riječi. Npr. pokušati izmijeniti redoslijed glasova u riječi. Izreći riječ od kraja, ili pak izmijeniti redoslijed riječi u rečenici.

A6: Govorni i pisani jezik. Poticati dijete da povezuje pisani tekst sa izgovorenim.

A7: Šifriranje. Jedan jednostavan način šifriranja je objašnjen na strani 45.

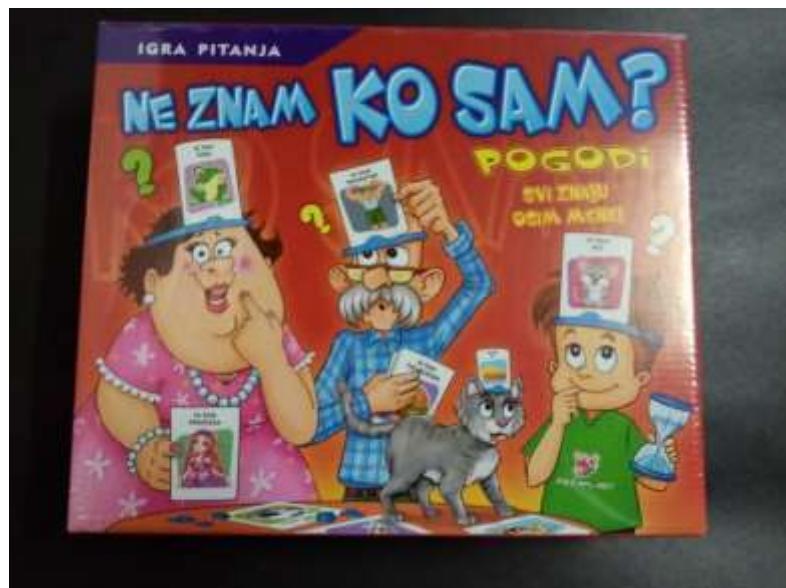
8 Logika

O izrazitom prisustvu logike u dječjem svijetu možete ukratko pročitati na strani 18.

A1. Logičko i konzistentno razmišljanje. Za razvijanje logike je najvažnije, kad djeca upotrebljavaju jezik za opis i analizu neke situacije ili kad nešto zamišljaju, da razvijaju logičan slijed misli, logično izvlače zaključke, i izbjegavaju nekonzistentnosti. Isti takav pristup valja da razvijaju i kad slušaju što im drugi govore, opisuju, izmišljaju, ...

A2: Pogađanje skrivenog objekta

Igra *Tko sam, što sam*. Evo jedne od mnogih komercijalnih verzija (nisu potrebne, dovoljno je da jedni zamisle a drugi propituju)



Može i pogađanje sakrivenog predmeta:

Mystery Box

Materials

The only materials you will need are a box (a shoe box or similarly sized box will do) and any household object that will fit inside the box.

Procedure

Children love riddles and mysteries. This activity is a favorite because of a child's curiosity to find out what is in the box. Put the object in the box so that your child does not know what it is. He or she can only find out what the mystery object is by asking questions that can be answered by a yes or no.

At first, your child will try to guess the object outright. (For example: "Is it a ball?") Encourage him or her to be a good detective and ask questions that will provide clues. (For example: "Is it round?" or, "Is it red?") Clues for your child to consider are color, size, shape, use, and so on. As your child becomes more proficient at this activity, you may want to have a limit on the number of questions asked, as in the game Twenty Questions.

(izvor mi je nepoznat)

A3: veznici: Izdvajanje objekata koji ispunjavaju neki uvjet kombiniran sa *i*, *ili*, *nije*

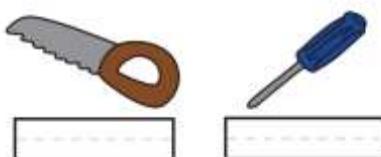
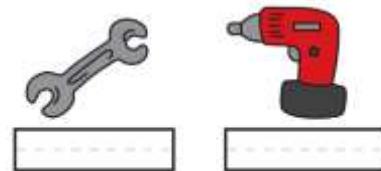


Fora zbirka Super zadataka

— MAKE ME A LIAR —

ACTIVITY

Someone makes a statement and the other players attempt to show that the person is lying.



Amy's tool has a blue handle.
Hugh's tool is not the screwdriver.
Carol's tool is all gray.
Devin's tool is electric.

One type of statement is to say something is always true. Examples of this are: all trucks have four wheels, all rectangles are squares, all birds can fly, and the moon comes out at night.

Another type of statement is of the form "if __, then __." Examples of this are: if today is Monday, then it is a school day; if I don't eat for three hours, then I am hungry; and if a person is taller than someone, then they are older.

(izvor mi je nepoznat)

Four cats line up for mittens: a white cat, a yellow cat, a brown cat, and black cat. The white cat is first in line. The black cat is in front of the yellow cat. The brown cat is in front of the black cat. What color is the last cat in line?

(izvor mi ne nepoznat)

Dienes blocks

ATTRIBUTES

	Shape	Size	Color	Thickness
VALUES	square	small	red	thin (skinny)
	rectangle	medium	blue	thick (fat)
	triangle	large	yellow	
	circle		green	
	ellipse (oval)			

(izvor mi je nepoznat)

Examples of subsets combining two values: all the blue rectangles, all the thick small pieces, all the green pieces that are not medium,

Examples of subsets combining three values: all the large green circles, all the thin yellow medium pieces, all the large triangles that are not red,

Ovakvi drveni blokovi su npr. WISSNER 39740 Active Learning Logical Blocks Expansion Set Attributes Blocks 60 Pieces - RE-Wood. Ja sam ih nabavio preko Amazon.de za 15Eu plus poštarina

U priči u Dodatku 1 zadnji problem je vezan za pravljenje logičkih uvjeta i njihovo rješavanje.

A4: Ispitivanje istinitosti: *Svi su A, Svi A su B, postoji neki A, neki A su B.* Npr, poredamo neke igračke - likove i kažemo „Sve igračke su životinje“ ili „Neke igračke su životinje“ ili „Svaka životinja je pas ili mačka“ a djeca određuju je li to istina ili laž. Poslije oni sami sastavljaju takve rečenice a mi odgovaramo.

A5: Glavolomke (izvor zagonetki na engleskom mi je nepoznat)

Billy's mother had five children. The first was named Lala, the second was named Lele, the third was named Lili, the fourth was named Lolo. What was the fifth child named?

You're driving a city bus. At the first stop, three women get on. At the second stop, one woman gets off and a man gets on. At the third stop, two children get on. The bus is blue and it's raining outside in December. What colour is the bus driver's hair?

Ima li u Hrvatskoj više uzbrdica ili nizbrdica? Više lijevih ili desnih okuka?

A man was walking in the rain in the middle of nowhere without a coat or an umbrella. He got soaked, but not a single hair on his head was wet. How can this be?

9 Proceduralno razmišljanje

O proceduralnom razmišljanju u dječjem svijetu možete ukratko pročitati na strani 18.

A1 recepti i upute. za kuhanje (dan je jedan primjer na strani 58) ili za izvršenje bilo kojeg fizičkog zadatka. Npr upute kako otići u dućan, kako macu nahraniti, kako napraviti brodić od papira. Upute kako doći do skrivenog predmeta.

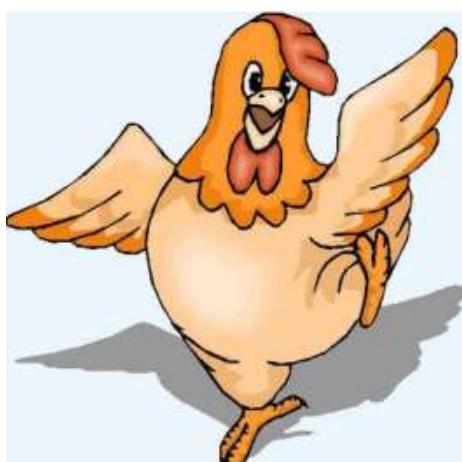
A2 Labirinti – Postoji jednostavan algoritam kako dijete može nešto pronaći u labirintu, ili naći izlaz iz labirinta, ili se vratiti na ulaz s kojeg je krenuo u labirint. Njega možete primijeniti na sve zadatke s labirintima. Najbolje bi bilo da se u dvorištu napravi pravi labirint. Taj algoritam je u osnovi stare grčke priče o Minotauru. Arijadna je dala grčkom junaku klupko (Arijadnina nit) i upute kako da pretraži labirint da bi našao Minotaure, i kako da se vrati nazad kad ga nađe. Sve dok ne nađe Minotaure Tezej razmotava klupko i radi sljedeće. Kad se nalazi na nekom raskršću ide u hodnik u kojem nema niti (znači da tamo nije bio), Ako su u svim hodnicima niti, tad se vraća hodnikom iz kojeg je došao (to je jedini hodnik u kojem je jedna nit – u svim ostalim su dvije niti jer je jednu razmotavao kad je ulazio u taj hodnik a

drugu kad se vraćao). Bilo da je krenuo nekim hodnikom ili se vratio nekim hodnikom opet će se naći na raskršću gdje opet primjenjuje ovu uputu. Ovaj postupak osigurava da će proći sve hodnike labirinta i vratiti se natrag. Naravno, Tezej će kad pronađe Minotaura, odmah ići natrag hodnicima u kojima je samo jedna nit.

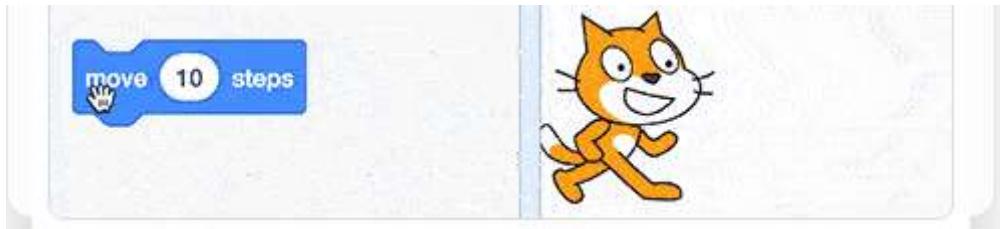
A3: Djed i repa je slavenska dječja priča koja ilustrira programsku ideju ponavljanja neke akcije dok se nešto ne ostvari. Priča se ,na primjer, može pronaći na <https://tesla.carnet.hr/mod/book/view.php?id=6681&chapterid=1440> , odakle je preuzeta i sljedeća ilustracija:



A4: Pošla koka na pazar je južno slavenska dječja priča koja ilustrira programsku ideju svođenja jednog problema na drugi. Jedna procedura pozove drugu, ova treću, a kad se zadnja izvrši, tad se i sve ove unazad završavaju. Priča se može naći na linku https://more.rivrtici.hr/sites/default/files/posla_koka_u_ducan_0.pdf .



A5: Programiranje. Scratch je programski jezik namijenjen djeci za učenje programiranja na vizualan način. Veoma je zanimljiv i djeci prilagođen, mada roditelji trebaju biti oprezni kada s tim početi i koliko djetetu dopustiti vremena da provede uz ekran. Evo teksta s njihove stranice <https://scratch.mit.edu/> : Scratch je najveća svjetska zajednica kodiranja za djecu i jezik kodiranja s jednostavnim vizualnim sučeljem koje mladima omogućuje stvaranje digitalnih priča, igara i animacija. Scratch je osmisnila, razvila i moderirala *Scratch Zajlada*, neprofitna organizacija.



10 Rješavanje problema

Na strani 19 je istaknuto da je rješavanje problema prirodno okruženje za razvijanje matematike. U prethodnim temama mnoge aktivnosti su uključivale *problem solving* ili direktno, ili bi trebalo izmisliti takav kontekst u kojem bi se ove aktivnosti prirodno pojavile. Ovdje evo nekih primjera

A1 Prelazak rijeke

11. WOLF, GOAT, AND CABBAGE

This problem can be found in eighth-century writings.



A man has to take a wolf, a goat, and some cabbage across a river. His rowboat has enough room for the man plus either the wolf or the goat or the cabbage. If he takes the cabbage with him, the wolf will eat the goat. If he takes the wolf, the goat will eat the cabbage. Only when the man is present are the goat and the cabbage safe from their enemies. All the same, the man carries wolf, goat, and cabbage across the river.

How?

(Kordemsky: The Moscow Puzzles)

10. CROSSING A RIVER

A detachment of soldiers must cross a river. The bridge is broken, the river is deep. What to do? Suddenly the officer in charge spots 2 boys playing in a rowboat by the shore. The boat is so tiny, however, that it can only hold 2 boys or 1 soldier. Still, all the soldiers succeed in crossing the river in the boat. How?

Solve this problem either in your mind or practically—that is, by moving checkers, matches, or the like on a table across an imaginary river.

(Kordemsky: The Moscow Puzzles)

A2 zagonetke

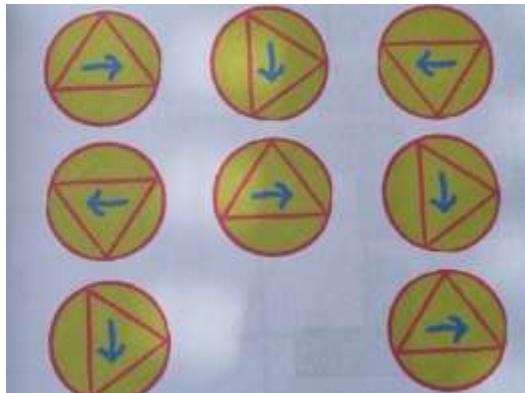
Škare ima, krojač nije,
u vodi živi, riba nije,
oklop nosi, vojnik nije. (rak)

Ima brke, djed nije.
Mlijeko pije, dijete nije. (maca)

Travu pase,
nije prase.
Ima roge, nema noge.
I bez nogu poljem šeće,
a bez kuće nikud neće.
(puž)

Svi što je vole
svi je tuku
udaraju nogom
i bacaju iz ruku.
(lopta)

A3 što nedostaje



(Dejić: Matematika kroz igru)

3 DODACI

1 DJECA, PČELE I PATULJCI

©Boris

Ovo je primjer kako se može matematički sadržaj ukomponirati u priču na način da su djeca u kontekstu priče prirodno motivirana da razvijaju odgovarajuću matematiku. Niže su dane tri verzije priče, matematički gledano srednja, lakša i teža verzija. Ovisno o trenutnim dječjim potrebama, ili potrebama grupe djece, mogu se napraviti i drugačije verzije. Ako se ova priča djeci čita, onda se mora osigurati odgovarajući materijal, i na njema demonstrirati matematički sadržaj, u suradnji i diskusiji s djecom. Još bolje, priča može poslužiti kao osnova za predstavu u kojoj će sama djeca kao glumci izvršavati matematički sadržaj, a mogu se i djeca iz publike u to uključiti.

SREDNJA VERZIJA

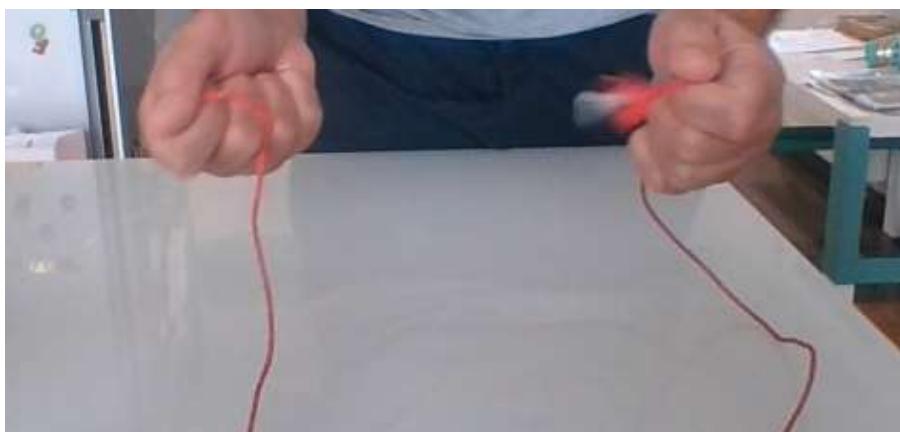
Potreban materijal: tri konopca duljine oko metar, nekoliko papirnatih traka duljine oko metar sa selotejpom i škarama, te likovi prikazani na sljedećoj slici:



*

Stiglo je proljeće. Nina, Ezra i Tara su radosno istrčali na livade poviše kuća. Igru im je prekinuo plač koji su čuli u blizini, na samom rubu šume. Kad su tamo dotrčali, imali su šta vidjeti: cijelo jato pčela je plakalo! „Zašto plačete?“, upitala su ih djeca. Pčele su im odgovorile da plaču jer su ljudi kad su kosili livade posjekli i maslačke. Bez maslačaka ne mogu pripremiti hranu za košnicu i njihove bebe će umrijeti od gladi. „Možemo li vam ikako pomoći?“, pitala su zabrinuta djeca. Pčele im odgovorile da maslačaka ima još jedino na jednoj livadi do koje put vodi kroz tjesnac koji čuvaju tri patuljka i koji nikome ne daju da prođe. Jedino puste onoga tko im zada zagonetku koju ne mogu riješiti. Do sada su riješili sve zagonetke i nikog nisu pustili. „Ma smislit ćemo im zagonetke koje neće znati riješiti“, odlučna su bila djeca. Sjela su na livadu i mislili, mislili, mislili, ... - i smislili. Otrčali su brzo do kuće uzeli malo konopca i raznih drvenih oblika.

Prvo su našli na patuljka Vilka. Malecki, s crvenom kapicom, špicastom bradicom i šiljastim čizmicama, smiješeći se trljao je ruke i upitao ih: „Imate li kakav problemčić za mene?“. „Imamo“ odgovorila su djeca. „Evo, uhvati krajeve ovog konopca rukama i napravi čvor a da ne ispuštaš krajeve iz ruku.“ „Ha, ništa lakše od toga“, samouvjereno je odgovorio Vilko. Uhvatio je krajeve konopca:



I motao konopac, vrtio rukama, petljao konopac, čak izgovarao čarobne riječi „abrakadabraodjutradomraka“, i slično:



Ali uvijek kad bi odmotao konopac ne bi bilo čvora:



Na kraju se strašno razljutio i stao vikati: „To je nemoguće! Tako se ne može napraviti čvor!“. „Moguće je“, mirno mu odgovoriše djeca, „Sad ćemo ti pokazati“. Ezra prekriži prvo ruke i onda uzme konop.

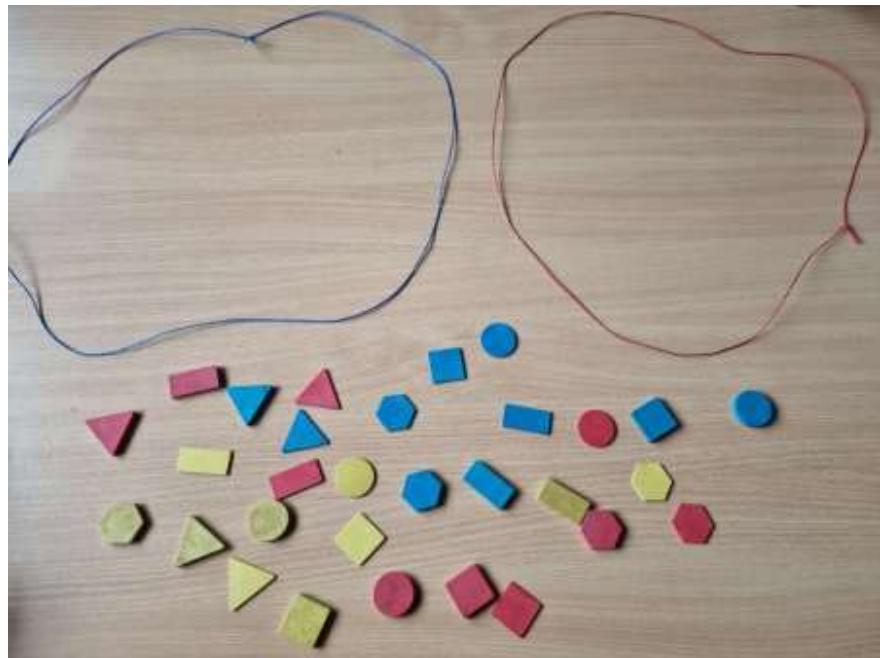


Kad je raširio ruke, konop se začvorao:

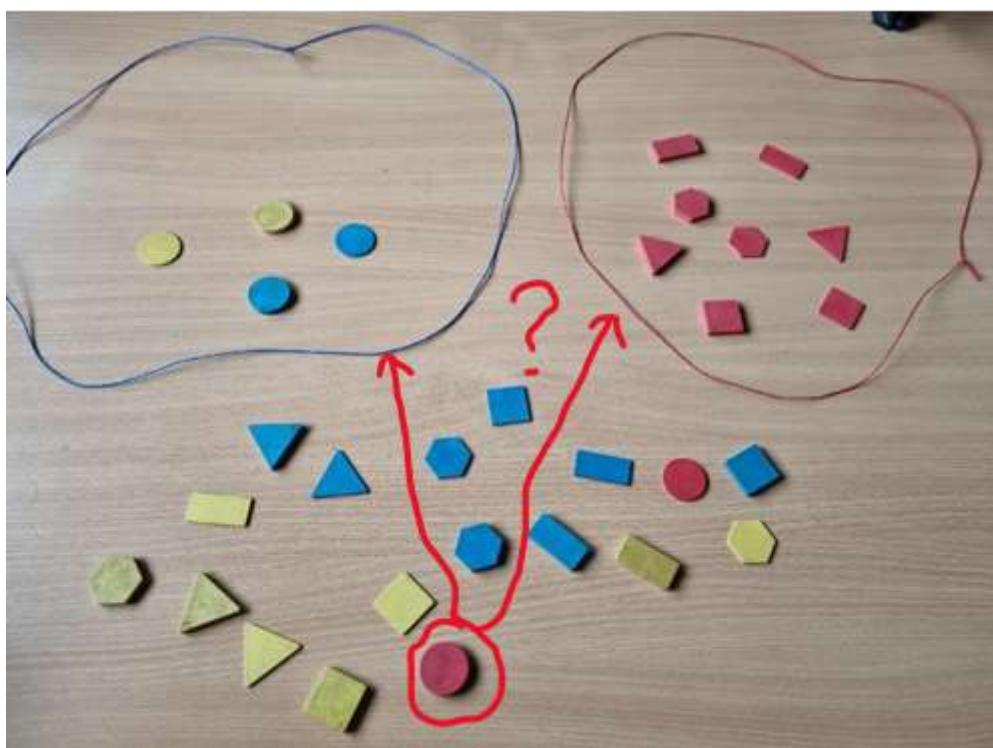


Kad je video da se to može napraviti, da je samo trebao drugačije uzeti krajeve konopca, Vilko je postao još ljući. Od ljutine je počeo skakati u krug i vrištati. Kad se malo smirio, priznao je da se zadatak ipak mogao riješiti i propustio je djecu i pčelice. Ali je i zaprijetio: „Mene ste prošli, ali mog starijeg brata Milka, sigurno nećete proći. On je jaaaako pametan i sigurno će riješiti vašu zagonetku.“. Pčele je to zabrinulo, ali djeca ih utješiše: „Ne brinite se pčelice, imamo mi još težu zagonetku“.

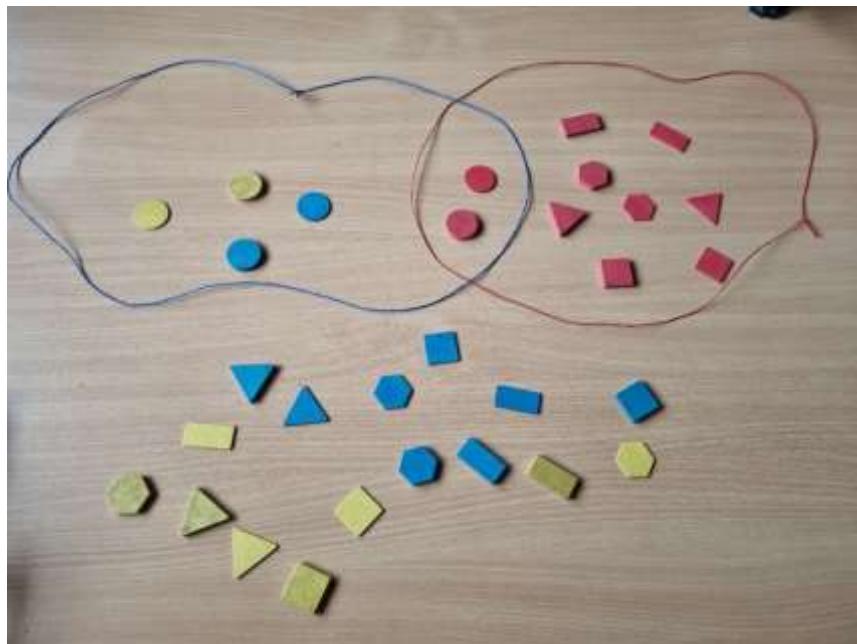
Ubrzo su naišli na patuljka Milka. Malecki, s plavom kapidicom, špicastom bradicom i šiljastim čizmicama, smiješeći se trljaо je ruke i upitao ih: „Imate li kakav problemčić za mene?“. „Imamo,“ odgovorila su djeca: „Ovdje se nalaze razni likovi i dva konopca.



Moraš okrugle likove staviti u jednu ogradu, a crvene likove u drugu.“ „Ha, pa to je lako“, rekao je Vilko, i počeo slagati okrugle likove u jednu ogradu a crvene likove u drugu. Ali kad je uzeo crveni krug, nije znao gdje ga staviti, jer bi ga morao staviti u obje ograde:



„To je nemoguće. Ovaj zadatak se ne može riješiti.“, samouvjereno je zaključio Vilko. „Sad ćeš vidjeti da je moguće“, rekoše djeca. Tara postavi ograde tako da su se crveni krugovi mogli staviti u obje ograde:



Kad je video da zagonetka ipak ima rješenje, patuljak Milko se počeo crvenjeti, crvenjeti i crvenjeti.... Počela mu je izlaziti para na uši, a oči su mu se zakolutale. Djeca su se zabrinula da mu nije dobro, dala mu da popije malo vode i vlažnom krpom mu brisali čelo. Kad se pribrao, Milko je plačljivo vrlsruo: „U pravu ste. Prođite. I onako nećete proći najstarijeg brata Pilka. On je naajpametniji patuljak i sigurno će riješiti vašu zagonetku“. Pčele je to zabrinulo, ali djeca ih utješiše: „Ne brinite se pčelice, imamo mi jednu posebno tešku zagonetku za njega“.

I tako, stigoše oni pred trećeg patuljka Pilka. Malecki, sa žutom kapicom, špicastom bradicom i šiljastim čizmicama, smiješći se trljaо je ruke i upitao ih: „Imate li kakav problemčić za mene?“. „Imamo,“ odgovorila su djeca: „Ovdje imaš papirnatu traku, selotejp i škare“:



„Prvo selotejpom poveži dijelove trake. Zatim škarama izreži traku tako da dobiješ dva kruga koja su međusobno spojena kao karike u lancu.“, dadoše mu djeca upute. „Ha, sad ću ja to odmah rješiti“, krene samouvjereno Pilko. Zalijepio je krajeve trake i škarama prerezao traku uzduž:



Ali umjesto spojenih dobio je razdvojene krugove:



„Čekajte, sad ću ja to riješiti“, uzvrpoljio se Pilko. Više puta je lijepio i rezao trake ali nikako nije uspijevao dobiti dva povezana kruga. Počeo se vрopoljiti, preznojavati, i na kraju ljutito skakati i vikati: „To je nemoguće. Ovaj zadatak se ne može riješiti. To je previše komplikirano. Joj, boli me glava. Imate li možda kakav lijek protiv glavobolje?“. Pčele su mu dale malo propolisa od čega ga je prestala boljeti glava a Nina mu je pokazala kako se to može riješiti. Uzela je jedan kraj trake,



zaokrenula je za puni krug,
i škarama uzduž prerezala traku:



selotejpom povezala s drugim krajem trake,



Dok je Pilko u nevjerici gledao rješenje, djeca su sa pčelama stigli do prekrasne livade pune žutih maslačaka. Pčelice su napunile svoje torbice i u povratku je od njihove vesele pjesme odjekivala cijela šuma. Kad je došlo vrijeme rastanka upitale su djecu kako da im se zahvale. Djeca su odgovorila da im je najveća zahvala vidjeti ih kako radosno zuje prirodom. Zatim su požurila kući, da se roditelji ne zabrinu, jer je već počeo padati mrak.

Te je godine voćnjak bio pun voća. Roditelji se nisu mogli načuditi koliko ga je bilo. Nijedne godine nije bilo toliko voća, govorili su. Djeca su se samo smješkala, jer su znala odgovor.

LAKŠA VERZIJA

Stiglo je proljeće. Nina, Ezra i Tara su radosno istrčali na livade poviše kuća. Igru im je prekinuo plač koji su čuli u blizini, na samom rubu šume. Kad su tamo dotrčali, imali su šta vidjeti: cijelo jato pčela je plakalo! „Zašto plačete?“, upitala su ih djeca. Pčele im odgovoriše da plaču jer su ljudi kad su kosili livade posjekli i maslačke. Bez maslačaka ne mogu pripremiti hranu za košnicu i njihove bebe će umrijeti od gladi. „Možemo li vam ikako pomoći?“, pitala su zabrinuta djeca. Pčele im odgovoriše da maslačaka ima još jedino na jednoj livadi do koje put vodi kroz tjesnac koji čuvaju tri patuljka i koji nikome ne daju da prođe. Jedino puste onoga tko im zada zagonetku koju ne mogu riješiti. Do sada su riješili sve zagonetke i nikog nisu pustili. „Ma smislit ćemo im zagonetke koje neće znati riješiti“, odlučna su bila djeca. Sjela su na livadu i mislili, mislili, mislili, ... - i smislili. Zajedno sa pčelama krenuli se prema livadi s maslačcima.

Prvo su naišli na patuljka Vilka. Malecki, s crvenom kapicom, špicastom bradicom i šiljastim čizmicama, smiješeći se trljaо je ruke i upitao ih: „Imate li kakvu zagonetkicu za mene?“. „Imamo.“, odgovorila su djeca, „Reci nam ima li u Zagrebu više uzbrdica ili nizbrdica?“. „Ma kakva je to zagonetka? Kako bih ja mogao znati koliko ima uzbrdica i nizbrdica u Zagrebu? To se ne može riješiti a da ne obidem cijeli grad.“, ljutio se Vilko. „Može“, rekoše djeca, „I to vrlo jednostavno. Ako je kad ideš s jedne strane uzbrdica, tada je kad ideš s druge strane nizbrdica, Dakle, u Zagrebu ima isto uzbrdica i nizbrdica.“.³⁶ Kad je čuo rješenje, Vilko se strašno naljutio. Od ljutine je počeo skakati u krug i vrištati. Kad se malo smirio, priznao je da se zagonetka ipak može riješiti i propustio je djecu i pčelice. Ali je i zaprijetio: „Mene ste prošli, ali mog starijeg brata Milka, sigurno nećete proći. On je jaaaako pametan i sigurno će riješiti vašu zagonetku.“. Pčele je to zabrinulo, ali djeca ih utješiše: „Ne brinite se pčelice, imamo mi još težu zagonetku“.

Ubrzo su naišli na patuljka Milka. Malecki, s plavom kapicom, špicastom bradicom i šiljastim čizmicama, smiješeći se, trljaо je ruke i upitao ih: „Imate li kakvu zagonetkicu za mene?“. „Imamo.“, odgovorila su djeca, „Reci nam ima li u Hrvatskoj više lijevih okuka ili desnih okuka?“. „Ma kakva je to zagonetka“, ljutio se Vilko, „Morao bih obići cijelu Hrvatsku i pregledati sve okuke da bih je riješio. To se ne može razmišljanjem riješiti.“ - odlučan je bio Milko. „Može.“, rekoše djeca, „Ako je kad ideš u jednom smjeru desna okuka onda je kad ideš u suprotnom smjeru lijeva okuka. Zato ima jednako lijevih i desnih okuka u Hrvatskoj“.³⁷ Kad je video da zagonetka ipak ima rješenje, patuljak Milko se počeo crvenjeti, crvenjeti i crvenjeti.... Počela mu je izlaziti para na uši, a oči su mu se zakolutale. Djeca su se zabrinula da mu nije dobro, dala mu da popije malo vode i mokrom krpom mu brisali čelo. Kad se

³⁶ Ovo se može jednostavno ilustrirati penjanjem sa saonicama po snijegu i spuštanjem saonicama niz snijeg. Ili, ako se prepričava uživo, nakošenim komadom papira.

³⁷ Ovo se može jednostavno ilustrirati dvosmernom cestom i autima koja idu u dva smjera. Jednom vozaču je okuka s lijeve strane, a drugom s desne. Ili, ako se prepričava uživo, savijemo komad papira, a dijete ga dirajući bližom rukom obilazi u jednom smjeru, pa kad se vraća mora promjeniti ruku kojom dira papir.

pribrao, Milko je plačljivo vrisnuo: „U pravu ste. Prođite. I onako nećete proći najstarijeg brata Pilka. On je naajpametniji patuljak i sigurno će riješiti vašu zagonetku“. Pčele je to zabrinulo, ali djeca ih utješiše: „Ne brinite se pčelice, imamo mi jednu posebno tešku zagonetku za njega“.

I tako, stigoše oni pred trećeg patuljka Pilka. Malecki, sa žutom kapicom, špicastom bradicom i šiljastim čizmicama, smiješći se, trljaо je ruke i upitao ih: „Imate li kakvu zagonetkicu za mene?“. „Imamo.“, odgovorila su djeca, „Na jednu rupu uđeš, na dvije izadeš. Kad si izашao tek si onda ušao. Šta je to?“. „Ma kakva je to zagonetka?“, ljutio se Pilko, „Kako netko može izići na dvije rupe? I ući tek kad je izšao? Ma to su besmislice!“ - počeo je ljutito vikati Pilko. Jadni Pilko, ma koliko se trudio i pokušavao riješiti zagonetku, nije uspio. Na kraju je stao ljutiti skakati i vikati: „To je nemoguće. To je nemoguće. Ova zagonetka nema rješenje. To je previše komplikirano. Joj, boli me glava. Imate li možda kakav lijek protiv glavobolje?“. Pčele su mu dale malo propolisa od čega ga je prestala boljeti glava. Djeca mu tad objasniše da je rješenje: hlače.³⁸ „Ha, sad mi je jasno“, rekao je Pilko, i kako se rastužio što nije znao riješiti, pa su ga djeca i pčelice morale tješiti. Kad su ga utješili, otišli su do prekrasne livade pune žutih maslačaka. Pčelice su napunile svoje torbice i u povratku je od njihove veselje pjesme odjekivala cijela šuma. Kad je došlo vrijeme rastanka upitale su djecu kako da im se zahvale. Djeca su odgovorila da im je najveća zahvala vidjeti ih kako radosno zuje prirodom. Zatim su požurila kući, da se roditelji ne zabrinu, jer je već počeo padati mrak.

Te je godine voćnjak bio pun voća. Roditelji se nisu mogli načuditi koliko ga je bilo. Nijedne godine nije bilo toliko voća, govorili su. Djeca su se samo smješkala, jer su znala odgovor.

TEŽA VERZIJA

Potreban materijal: tri konopca duljine oko metar, te likovi prikazani na sljedećoj slici:



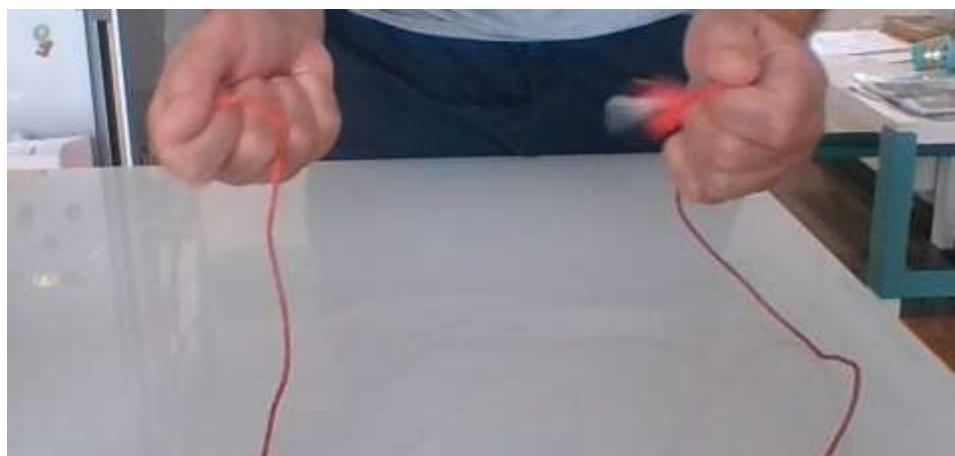
*

Stiglo je proljeće. Nina, Ezra i Tara su radosno istrčali na livade poviše kuća. Igru im je prekinuo plać koji su čuli u blizini, na samom rubu šume. Kad su tamо dotrčali, imali su šta vidjeti: cijelo jato pčela je plakalo! „Zašto plăcete?“, upitala su ih djeca. Pčele su im

³⁸ Ovo se jednostavno može ilustrirati. Ili, ako se prepričava uživo, pokazati na vlastitim hlačama.

odgovorile da plaču jer su ljudi kad su kosili livade posjekli i maslačke. Bez maslačaka ne mogu pripremiti hranu za košnicu i njihove bebe će umrijeti od gladi. „Možemo li vam ikako pomoći?“, pitala su zabrinuta djeca. Pčele im odgovorile da maslačaka ima još jedino na jednoj livadi do koje put vodi kroz tjesnac koji čuvaju tri patuljka i koji nikome ne daju da prođe. Jedino puste onoga tko im zada zagonetku koju ne mogu riješiti. Do sada su riješili sve zagonetke i nikog nisu pustili. „Ma smislit ćemo im zagonetke koje neće znati riješiti“, odlučna su bila djeca. Sjela su na livadu i mislili, mislili, mislili, ... - i smislili. Otrčali su brzo do kuće uzeli malo konopca i raznih drvenih oblika.

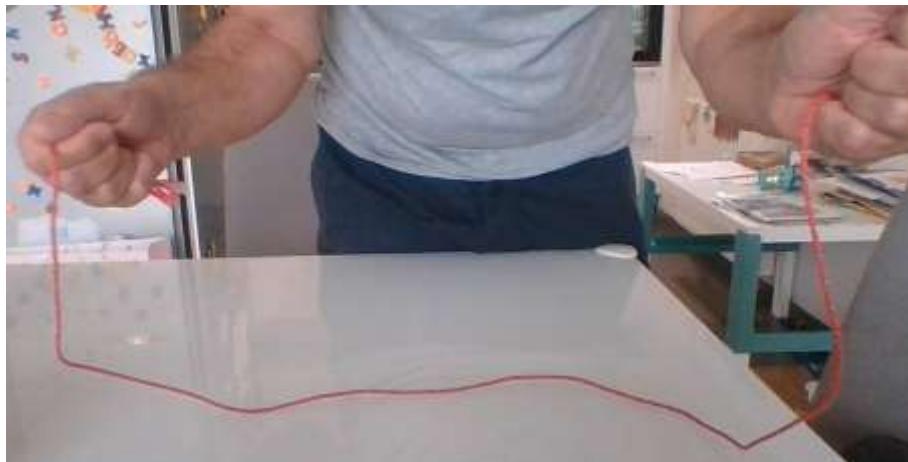
Prvo su našli na patuljka Vilka. Malecki, s crvenom kapicom, špicastom bradicom i šiljastim čizmicama, smiješeći se trljao je ruke i upitao ih: „Imate li kakav problemčić za mene?“. „Imamo“ odgovorila su djeca. „Evo, uhvati krajeve ovog konopca rukama i napravi čvor a da ne ispuštaš krajeve iz ruku.“ „Ha, ništa lakše od toga“ samouvjereno je odgovorio Vilko. Uhvatio je krajeve konopca:



I motao konopac, vrtio rukama, petljao konopac, čak izgovarao i čarobne riječi „abradabrabrakadabradomraka“ i slično:



Ali uvijek kad bi odmotao konopac ne bi bilo čvora:



Na kraju se strašno razljutio i stao vikati: „To je nemoguće! Tako se ne može napraviti čvor!“. „Moguće je“, mirno mu odgovoriše djeca. „Sad ćemo ti pokazati“. Ezra prekriži prvo ruke i onda uzme konop.

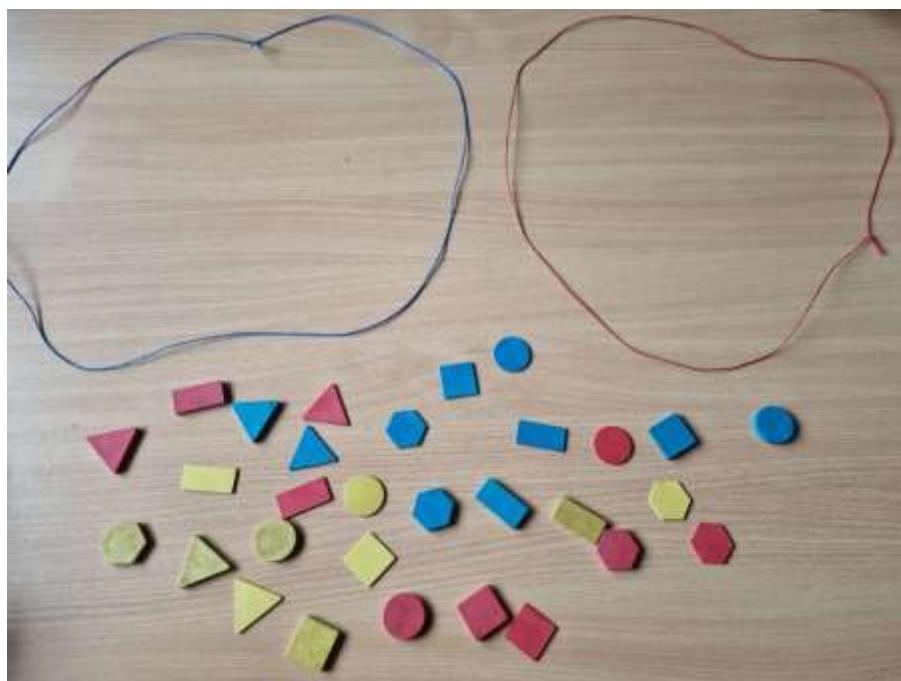


Kad je raširio ruke, konop se začvorao:

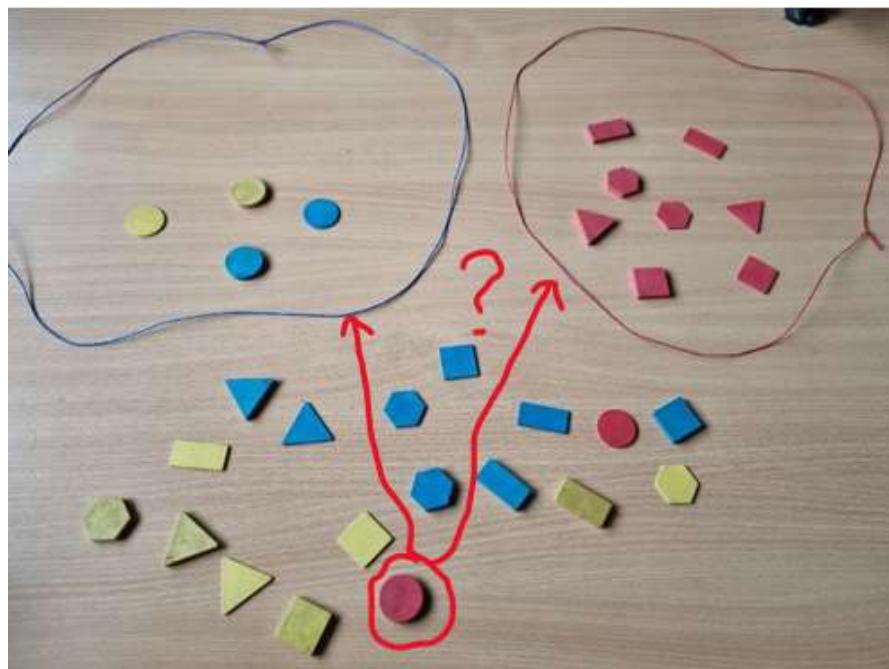


Kad je video da se to može napraviti, da je samo trebao drugačije uzeti krajeve konopca, Vilko je postao još ljući. Od ljutine je počeo skakati u krug i vrištati. Kad se malo smirio, priznao je da se zadatak ipak mogao riješiti i propustio je djecu i pčelice. Ali je i zaprijetio: „Mene ste prošli, ali mog starijeg brata Milka, sigurno nećete proći. On je jaaaako pametan i sigurno će riješiti vašu zagonetku.“. Pčele je to zabrinulo, ali djeca ih utješiše: „Ne brinite se pčelice, imamo mi još težu zagonetku“.

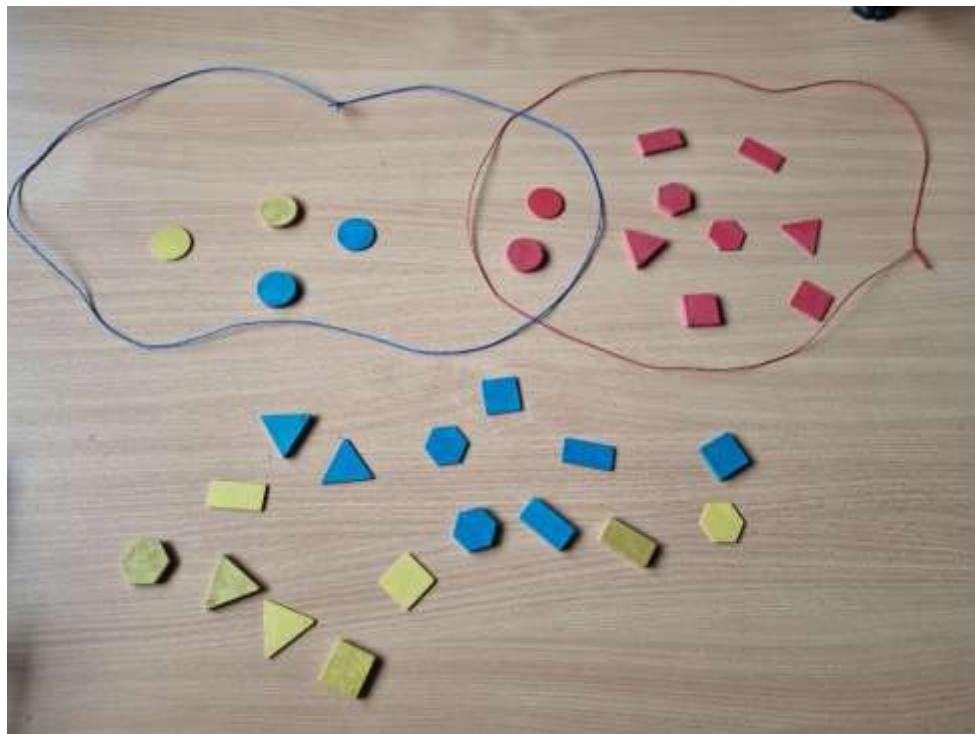
Ubrzo su naišli na patuljka Milka. Malecki, s plavom kapidicom, špicastom bradicom i šiljastim čizmicama, smiješeći se trljaо je ruke i upitao ih: „Imate li kakav problemčić za mene?“. „Imamo,“ odgovorila su djeca: „Ovdje se nalaze razni likovi i dva konopca.



Moraš okrugle likove staviti u jednu ogradu, a crvene likove u drugu.“ „Ha, pa to je lako“, rekao je Vilko, i počeo slagati okrugle likove u jednu ogradu a crvene likove u drugu. Ali kad je uzeo crveni krug, nije znao gdje ga staviti, jer bi ga morao staviti u obje ograde.



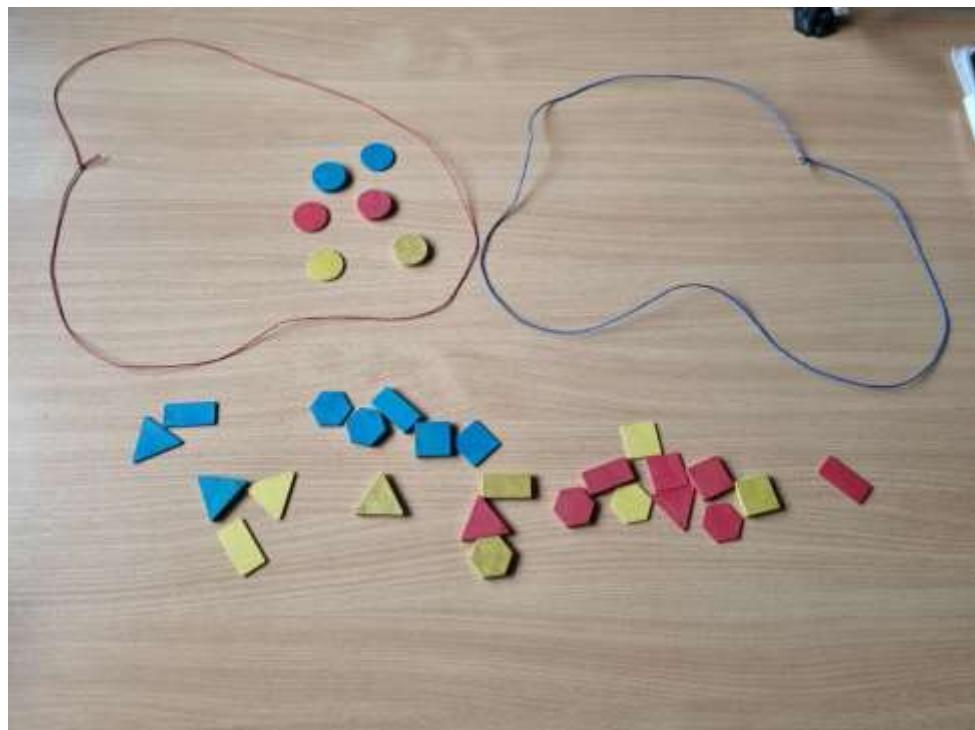
„To je nemoguće. Ovaj zadatak se ne može riješiti.“, samouvjereno je zaključio Vilko. „Sad ćeš vidjeti da je moguće“, rekoše djeca. Tara postavi ograde tako da je crvene krugove mogla staviti u obje ograde:



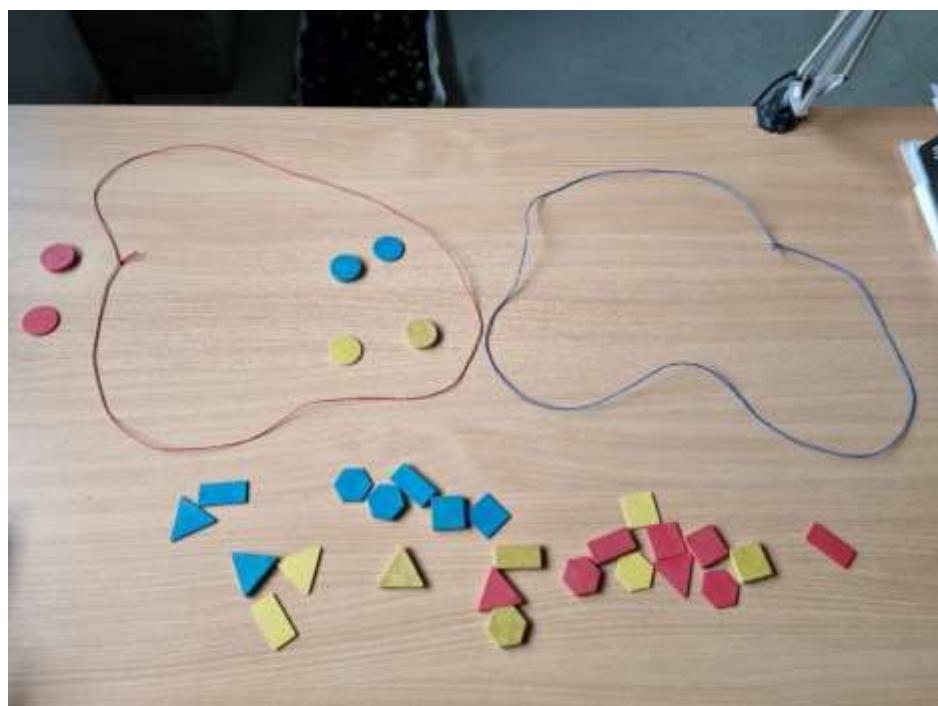
Kad je vidio da zagonetka ipak ima rješenje, patuljak Milko se počeo crvenjeti, crvenjeti i crvenjeti.... Počela mu je izlaziti para na uši, a oči su mu se zakolutale. Djeca su se zabrinula da mu nije dobro, dala mu da popije malo vode i mokrom krpom mu brisali čelo. Kad se pribrao, Milko je plačljivo vrissnuo: „U pravu ste. Prođite. I onako nećete proći najstarijeg brata Pilka. On je naajpametniji patuljak i sigurno će riješiti vašu zagonetku“. Pčele je to zabrinulo, ali djeca ih utjeшиле: „Ne brinite se pčelice, imamo mi jednu posebno tešku zagonetku za njega“.

I tako, stigoše oni pred trećeg patuljka Pilka. Malecki, s plavom kapicom, špicastom bradicom i šiljastim čizmicama, smiješći se trljaо je ruke i upitao ih: „Imate li kakav problemčić za mene?“. „Imamo,“ odgovorila su djeca: Ovdje imaš razne likove i dva konopca. Trebaš ograditi sve likove koji su okrugli i nisu crveni ili su plavi i nisu kvadrati.“ „Ha, sad ću ja to odmah riješiti“ krene žustro Pilko, ali već za prvi lik nije se mogao odlučiti je li taj lik okrugao i nije ... „Kako ste ono rekli djeco?“ - smeo se Pilko. „Okrugli i nisu crveni ili su plavi i nisu kvadrati“, ponoviše djeca. „Ma sad ću ja“, bodrio je sam sebe Pilko, ali nikako nije mogao zapamtiti kakve to likove treba razdvojiti. „Okrugli i nisu crveni ili su plavi i nisu kvadrati“ - stalno su mu morala ponavljati djeca. Jadni Pilko, ma koliko se trudio i pokušavao izdvojiti „okrugle i... Ma kako ono ide?“, na kraju je stao ljutiti skakati i vikati: „To je nemoguće. Ovaj zadatak se ne može riješiti. To je previše komplikirano. Joj, boli me glava. Imate li možda kakav lijek protiv glavobolje?“ Pčele su mu dale malo propolisu od čega ga je prestala boljeti glava a Nina mu pokazala kako se to može riješiti. Objasnjavala mu je polako, korak po korak, da ga opet ne zabolje glava.

„Pilko, kad imаш neki teži zadatak, prvo ga moraš rastaviti na dijelove koje je lakše riješiti.“, objašnjavala Nina, „Umjesto da tražimo sve likove koji su okrugli i nisu crveni ili su plavi i nisu kvadrati, a od čega boli glava, prvo ćemo naći sve likove koji su okrugli i nisu crveni. A da bismo njih našli prvo ćemo pronaći sve okrugle likove. I to je lako, Evo:“

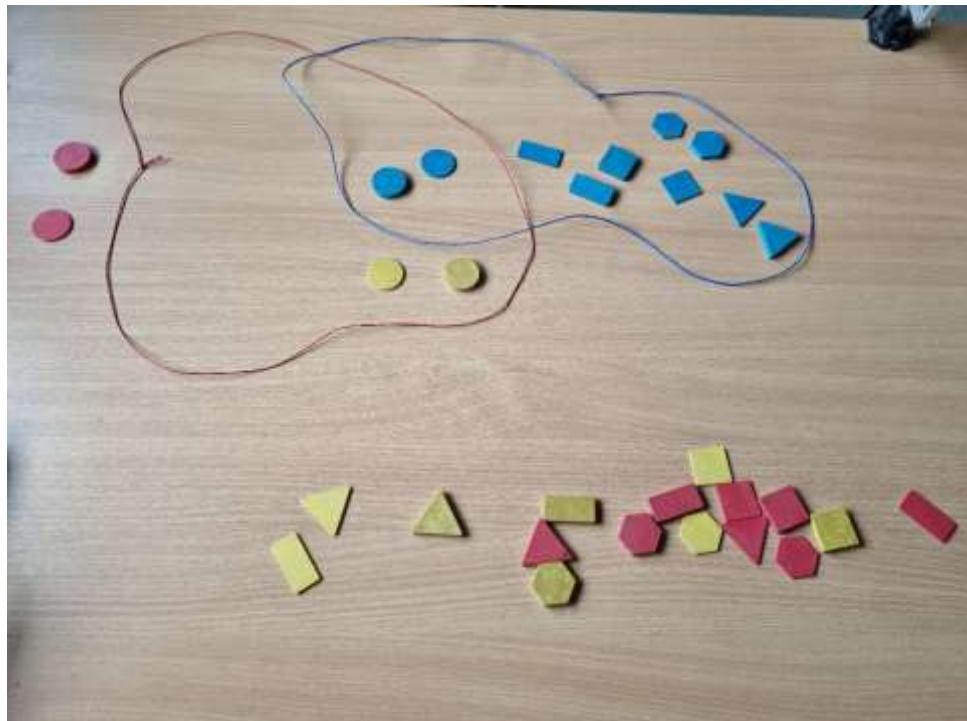


„Sad ćemo među njima uzeti one koji nisu crveni. I to je lako. Izbacit ćemo crvene“

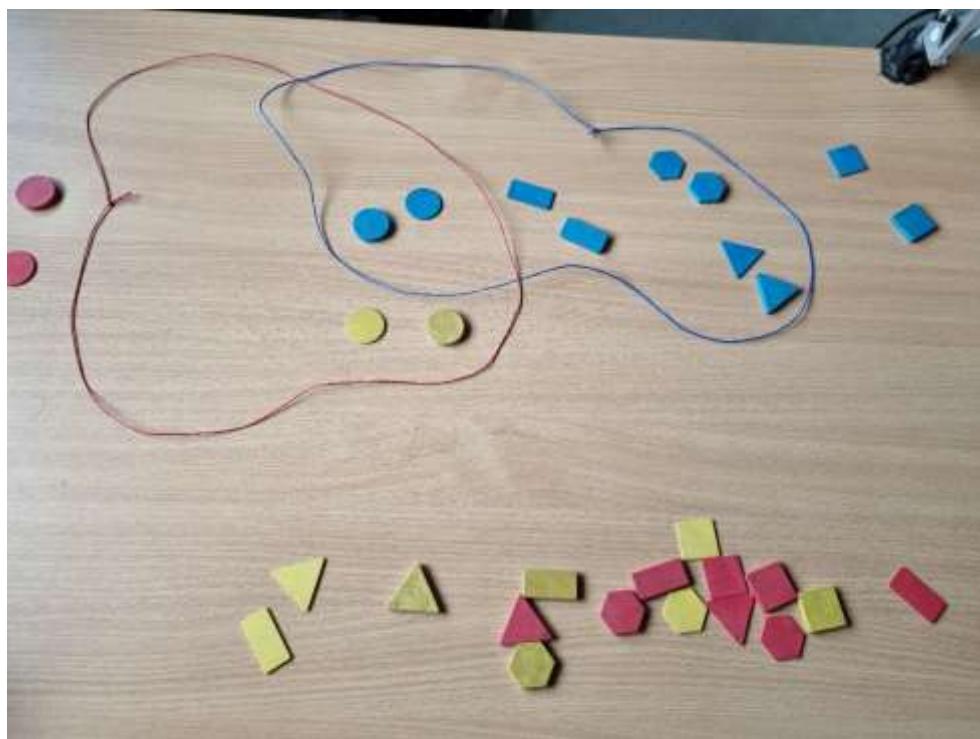


„Evo Pilko, dobili smo sve okrugle likove koji nisu crveni“.

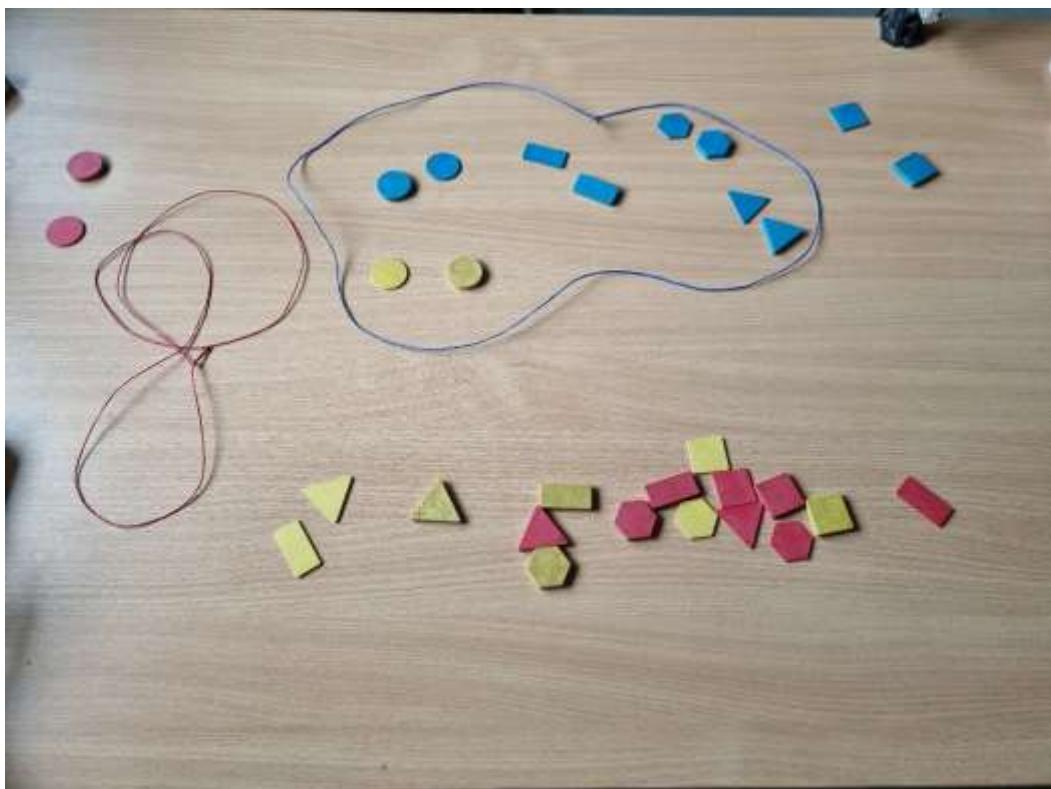
„Na isti način ćemo pronaći sve plave likove koji nisu kvadrati. Prvo ćemo pronaći sve plave likove“



„Sad ćemo među njima uzeti one koji nisu kvadrati, tako da izbacimo kvadrate.“



„Vidiš Pilko“, objašnjavala mu je Nina, „likovi koje si trebao izdvojiti su likovi koji su okrugli i nisu crveni, a to su ovi lijevo, ili su plavi i nisu kvadrati, a to su ovi desno, pa su to upravo svi ovi likovi zajedno. I to je rješenje.“



„Ha, sad mi je jasno“, rekao je Pilko, mada još nije bio posve siguran je li mu jasno.

Dok je Pilko u nevjerici gledao rješenje, djeca su sa pčelama stigli do prekrasne livade pune žutih maslačaka. Pčelice su napunile svoje torbice i u povratku je od njihove vesele pjesme odjekivala cijela šuma. Kad je došlo vrijeme rastanka upitale su djecu kako da im se zahvale. Djeca su odgovorila da im je najveća zahvala vidjeti ih kako radosno zuje prirodom. Zatim su požurila kući, da se roditelji ne zabrinu, jer je već počeo padati mrak.

Te je godine voćnjak bio pun voća. Roditelji se nisu mogli načuditi koliko ga je bilo. Nijedne godine nije bilo toliko voća, govorili su. Djeca su se samo smješkala, jer su znala odgovor.

2 VUK I 10 KOZLIĆA

©Boris

(skica za izmijenjenu klasičnu priču u kojoj su vuka zbunili brojevi)

Mama koza je rekla dječici: „Draga djeco, nestalo nam je hrane. Moram ići u supermarket u nabavu. I suđe nam se porazbijalo. Kupit ću vam 10 tanjurića i 10 čaša, tako da će svatko od vas imati svoj tanjurić i svoju čašu.“. Čuo to vuk koji je u blizini prolazio. Nakon dužeg razmišljanja, jer nije bio baš vješt u brojanju, vuk je sav sretan zaključio da je unutra 20 kozlića (očekuje se dječja reakcija). Uskoro će ostati sami i on će ih sve poloviti. Kakva li će to biti gozba! Čim je mama koza otišla, vuk pokuca na vrata i rekne vučjim promuklim glasom:

„Otvorite djeco, došla je vaša mamica“. Kozlići se stadoše smijati: „Kakva naša mamica. Ti si vuk. Poznajemo te po glasu.“. Ljutit vuk ode do potoka i dobro se napije hladne vode da bi mu glas postao piskutav. Opet pokuca na vrata i rekne slatkastim glasom: „Otvorite draga dječice. Došla je vaša mama. Donijela sam vam svašta za jesti“.. „Reci majko prvo lozinku.“, odgovoriše oprezni kozlići. „Kakva lozinka? Šta je to lozinka?“, pitao se u sebi vuk (možemo djecu propitivati o lozinci). „Zaboravila sam kupiti lozinku“, dosjeti se vuk, a kozlići prasnuše u smjeh: „Ma nisi ti naša mama. Ti si vuk.“. Vuk ljutito udari u vrata. Kakvog li iznenađenja! Vrata se širom otvorile. Mama koza je, brinući se da ne zaboravi šta će kupiti, zaboravila zatvoriti vrata! Kozlići stadoše vrištati, a vuk ih stade sakupljati u vreću. Kad je potrpao sve kozliće u vreću, odlučio ih je prebrojati da vidi da li koji nedostaje. Ali to mu nije bilo lako uraditi, jer nije želio raširiti vreću da ne bi koje kozle pobjeglo. Zato je uvukao ruku u vreću i dodirivanjem ih pokušavao prebrojiti. Ali kozlići su se migoljili, pa je jednom izbrojao 12 kozlića, drugi put 8 a treći put 15 (mogu se djeca ovdje upitati je li mogao smisliti neki bolji način za prebrajanje). „Nema veze koliko ih je točno. Važno je da sam svaki put dobio da je više od 20 kozlića“, zadovoljno je razmišljao vuk (očekuje se dječja reakcija). Jedva je uspio staviti vreću na ramena, bila je preteška. No ipak je nastavio, jer nije htio da izbaci nijednog kozlića i tako olakša vreću. Na putu prema šumi je morao preći potok preko jednog balvana. Na početku balvana je bio natpis sa upozorenjem „Najviše 7 kozlića se može prenijeti preko balvana!“. S obzirom da vuk nije bio dobar u brojanju, upitao je kozliće je li 20 veće od 7. „Jeste“ viknuše mudri kozlići. „Moraš jednog od nas pustiti, pa će nas biti 7“, lagali su kozlići. Vuk pusti jednog, misleći da ih je sad 7 u vreći (tu možemo pitati djecu koliko ih je sad u vreći i je li to više od 7). Pušteni kozlić brzo požuri obavijestiti mamu. Kako ih je sad bilo 9 u vreći, kad je vuk prelazio preko balvana, balvan puknu (možemo pitati djecu zašto se to desilo), vuk se strovali u potok, polomi nogu, vreća padne po njemu, odriješi se i kozlići se razbjježaše. Da i ne govorimo kako mu je bilo kad je mama koza došla po svoje kozliće i zatekla ga u potoku. Jedva je živu glavu izvukao.